Exercice 1

1. Simplifier le nombre : $A = \dfrac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}}{\sqrt[4]{4} \times \sqrt{16}}$.
2. Mettre en ordre les nombres suivants : $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[12]{700}$
3. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2-x-3}-2x$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(E)\ :\ \sqrt[3]{x^2-1} = 2$; $\quad (I)\ :\ \sqrt[4]{x-2} < 1$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -x^3 - 3x - 1$

1. Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) Vérifier que : $-1 < \alpha < 0$
   (c) Montrer que : $\alpha = -\sqrt[3]{-3\alpha - 1}$
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = g(x) - \alpha & ; \quad x \leq \alpha \\ h(x) = \sqrt[3]{-3x-1} & ; \quad x > \alpha \end{cases}$

   Montrer que h est continue en α.

Exercice 3

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x + 3 - 2\sqrt{x-2}$

1. Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Montrer que la fonction f est continue sur $[2, +\infty[$
3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 ; puis interpréter le résultat géométriquement
4. (a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2}+1)} \quad \forall x \in]2, +\infty[$
   (b) Dresser le tableau des variations de la fonction f
5. On considère la fonction g la restriction de f sur l'intervalle $I = [3, +\infty[$
   (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J à déterminer
   (b) En déduire les variations de la fonction g^{-1}
   (c) Calculer $g(11)$ puis déduire $g^{-1}(8)$
   (d) Montrer que g^{-1} est dérivable en 8 ; puis Calculer $(g^{-1})'(8)$
6. Déterminer l'expression $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

﴿بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ قُلْ هُوَ ٱللَّهُ أَحَدٌ (1) • ٱللَّهُ ٱلصَّمَدُ (2) • لَمْ يَلِدْ وَلَمْ يُولَدْ (3) • وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ كُفُوًا أَحَدٌۢ (4) •﴾

(الإخلاص)