

Devoir surveillé n°1

Un point de plus sur la clarté des raisonnements et la propreté de la feuille

Exercice 1 : 2 points

Soit f une fonction numérique définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{x-3} & \text{si } x > 3, \\ ax & \text{si } x < 3, \end{cases} \quad \text{et } f(3) = \frac{1}{12}.$$

- 1 | 1 – Montrer que f est continue à droite en 3.
1 | 2 – Déterminer la valeur de a pour que f soit continue à gauche en 3.

Exercice 2 : 13 points

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x + 1 + 2\sqrt{x+2}$.

- 0.5 | 1 – Déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f .
1.5 | 2 – Étudier la dérivabilité de f à droite en -2 ,
puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.
1 | 3 – Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-2; +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de f .
1.5 | 4 – Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $] -2; -1[$.
1 | 5 – Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0,5.
1 | 6 – Déduire le signe de la fonction f sur $[-2; +\infty[$.
1.5 | 7 – Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}
définie sur un intervalle J à déterminer.
0.75 | 8 – Vérifier que $\forall x \in [-2; +\infty[: f(x) = (\sqrt{x+2} + 1)^2 - 2$.
0.75 | 9 – Calculer $f(-1)$ et en déduire $(f^{-1})'(2)$.
2 | 10 – Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$, puis dresser son tableau de variations.

Exercice 3 : 5 points

- 1 | 1 – Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants : $2, \sqrt[3]{9}, \sqrt{3}, \sqrt[6]{80}$.
1 | 2 – Calculer les limites suivantes :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} + \sqrt{x+1} - 3}{x}$$

1.5 | 3 – Montrer que :
$$\frac{\sqrt[8]{64} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[6]{72}}{\sqrt[4]{8} \times 3^{-\frac{2}{3}}} = 3.$$

Bonne chance à tous