Problème 01

On considère la fonction numérique F définie sur $[0;1]$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(1+2x)}{2x^3} & \text{si} \quad x \in]0;1] \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

① Soit $x \in [0;1]$. Montrer que : $(\forall t \in [0;x]) \quad \dfrac{1}{1+2x} \leqslant \dfrac{1}{1+2t} \leqslant 1$.

② Soit $x \in]0;1]$.

a) Montrer : $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{1+2t}\,dt$.

b) Montrer : $\dfrac{1}{1+2x} \leqslant F(x) \leqslant 1$ puis en déduire que la fonction F est continue à droite en 0.

③ En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in [0;1]) \quad \int_0^x \frac{2t}{1+2t}\,dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$$

④ Soit $x \in]0;1]$.

a) Montrer que : $F'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x \left(\dfrac{t}{1+2t}\right)^2 dt$.

b) Montrer que : $-\dfrac{4}{3} \leqslant F'(x) \leqslant -\dfrac{4}{3(1+2x)^2}$.

c) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$, montrer que :

$$-\frac{4}{3} \leqslant \frac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant -\frac{4}{3(1+2x)^2}$$

d) En déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 et déterminer $F'_d(0)$.

Problème 02

Première Partie :

On considère la fonction numérique g définie par : $g(x)=\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$.

On désigne par $(\mathscr{C}_g)$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① a) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g .

b) Vérifier que le point $\Omega(1\,;0)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

② a) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

b) Étudier les variations de la fonction g .

c) Construire la courbe $(\mathscr{C}_g)$.

③ Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_g)$ et les droites d'équations cartésiennes $y=0$, $x=0$ et $x=1$.

Deuxième Partie :

Soit f et F les fonctions numériques définies par : $f(t)=\sqrt{t^2-2t+2}$ et $F(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$.

① Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

② Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

③ Vérifier que la fonction F' est impaire et en déduire que la fonction F est paire.

④ a) Montrer que : $(\forall x\in\,]1\,;+\infty[)\quad x-1<f(x)<x-1+\dfrac{1}{x}$.

b) En déduire que : $(\forall x\in\,]1\,;+\infty[)\quad 2x\leqslant F(x)\leqslant 2x+\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

⑤ On veut calculer $F(0)$; pour cela, on considère l'intégrale : $I=\displaystyle\int_0^2 \frac{(t-1)^2}{f(t)}\,dt$.

a) Calculer $F(0)-I$.

b) En utilisant une intégration par parties sur I , calculer $F(0)+I$.

c) En déduire la valeur du nombre $F(0)$.

⑥ a) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_F)$ de la fonction F .

b) Étudier les variations de la fonction f .

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_F)$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Problème 03

Première Partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec : $\|\vec{i}\|=1cm$.

① Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.

② Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

③ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la fonction numérique g_n définie sur $]0;1[$ par : $g_n(x)=f(x)-x^n$.

a) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;1[$.

b) En déduire qu'il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $g_n(\alpha_{n+1})<0$.

d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

④ On pose : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$.

a) Vérifier que : $0<\alpha_1\leqslant\ell\leqslant 1$.

b) Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $h(\alpha_n)=n$ où $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$.

c) Montrer que : $\ell=1$.

d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$.

Deuxième Partie :

① a) Étudier le signe de l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ pour tout $x\in]0;+\infty[$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\int_x^1 f(t)\,dt=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$$

c) En déduire, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e^2$.

② Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que si k et n sont deux entiers naturels tels que : $n\geqslant 2$ et $1\leqslant k\leqslant n-1$, alors :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\,dt\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\,dt\leqslant u_n\leqslant\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(t)\,dt+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

Problème 04

Première Partie :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=(1+x)e^{-2x}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

② Étudier les variations de la fonction f .

③ a) Étudier la concavité de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Deuxième Partie :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, les axes du repère et la droite d'équation $x=n$.

① Calculer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n .

② Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$.

Troisième Partie :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n=n\displaystyle\int_0^1 (f(x))^n dx$.

① En utilisant le changement de variable $t=nx$, montrer que : $u_n=\displaystyle\int_0^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}dt$.

② a) Montrer que : $(\forall u\in[1;2])\quad 2-u\leqslant\dfrac{1}{u}\leqslant 1$.

b) En déduire que : $(\forall x\in[0;n])\quad x-\dfrac{x^2}{2n}\leqslant n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\leqslant x$.

③ a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n\leqslant\displaystyle\int_0^n e^{-x}dx$.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad e^{-\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}}\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{n}} e^{-x}dx\leqslant u_n$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

④ Soit $a\in\,]0;1[$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_a^1 n(f(x))^n dx\leqslant n(1-a)\,(f(a))^n$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^1 n(f(x))^n dx=0$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^a n(f(x))^n dx$.

Problème 05

Première Partie :

① Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x}$ et en déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}=0$.

② Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $I(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$.

a) Sans calculer $I(x)$, montrer que :

$$\left[(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ 0\leqslant I(x)\leqslant \frac{x^3e^x}{6}\right] \quad \text{et} \quad \left[(\forall x\in\mathbb{R}^-)\ |I(x)|\leqslant\frac{|x|^3}{6}\right]$$

b) En utilisant deux fois la formule d'intégration par parties, montrer que : $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$.

c) En utilisant ce qui précède, montrer que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et en déduire que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\frac{1}{2}$$

③ Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=e^x\ln(1+x)-x$.

a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $e^x\geqslant 1+x$.

b) Étudier les variations de la fonction f .

c) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $f(x)\geqslant 0$.

Deuxième Partie :

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt & \text{si } x>0 \\ F(0)=0 \end{cases}$$

① Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{e^x-1-x}{x}\leqslant F(x)\leqslant\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$.

② Montrer que la fonction F est dérivable à droite en 0 .

③ Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$.

④ a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

b) Étudier les variations de la fonction F .

Problème 07

Première Partie :

Soit s et c les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par : $s(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ et $c(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$.

On note $(\mathscr{C}_s)$ et $(\mathscr{C}_c)$ les courbes représentatives respectives de s et c dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① a) Montrer que la fonction s est impaire et la fonction c est paire.

b) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ c^{2}(x)-s^{2}(x)=1$.

② Étudier les branches infinies de chacune des courbes $(\mathscr{C}_s)$ et $(\mathscr{C}_c)$.

③ a) Étudier les variations de chacune des fonctions s et c .

b) Tracer les courbes $(\mathscr{C}_s)$ et $(\mathscr{C}_c)$ dans un même repère.

④ a) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ c(2x)=2c^{2}(x)-1$.

b) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathscr{C}_s)$ autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;1]$ un tour complet.

⑤ Montrer que la fonction s admet une fonction réciproque s^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ puis donner l'expression de $s^{-1}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Deuxième Partie :

① En utilisant le changement de variable $x=s(t)$, calculer l'intégrale : $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^{2}}}\,dx$.

② En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $J=\displaystyle\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)dx$.

Troisième Partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$.

On considère les suites numériques $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$ par :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\qquad\text{et}\qquad v_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

① Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que sa limite est $\ln 2$.

② a) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^{*}$: $1-\dfrac{t^{2}}{2}\leqslant f'(t)\leqslant 1$.

b) En déduire que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^{*}$: $t-\dfrac{t^{3}}{3}\leqslant f(t)\leqslant t$.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^{*}$: $u_n\left(1-\dfrac{1}{6n^{2}}\right)\leqslant v_n\leqslant u_n$ puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

Quatrième Partie :

On considère la fonction numérique F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2}\,dt & \text{si} \quad x \neq 0 \\ F(0) = \ln 2 \end{cases}$$

① Vérifier que l'ensemble de définition de F est $D_F = \mathbb{R}$ puis montrer que la fonction F est paire.

② Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad -\dfrac{x^2}{4} + \ln 2 \leqslant F(x) \leqslant \ln 2$.

③ a) Vérifier que la fonction F est continue en 0 .

b) Étudier la dérivabilité de la fonction F en 0 .

④ a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \dfrac{f(x)}{2x} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{f(2x)}{2x}$.

b) En déduire la nature de la branche infinie de la courbe $(\mathscr{C}_F)$ de F au voisinage de $+\infty$.

⑤ a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad F'(x) = \dfrac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$.

b) En utilisant la monotonie de la fonction f' , montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f(2x) - 2f(x) \leqslant 0$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

⑥ Construire la courbe $(\mathscr{C}_F)$ dans un repère orthonormé $(O'; \vec{u}, \vec{v})$.