

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - \ln(\sqrt{-x}))$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \ln(x)}{x - \ln(x)}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(x+1)}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \ln(x) \right)$
6. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right)$
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3(x)}{x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln(x) - 1)^2$

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x-1}, & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est continue en 1.
3. (a) Montrer que : $(\forall t \in]-1; 0[) (\exists c \in]t; 0[) \frac{\ln(t+1) - t}{t^2} = -\frac{1}{2(c+1)}$.
(b) En déduire que f est dérivable à gauche en 1.
4. (a) Montrer que : $(\forall t \in]0; +\infty[) \quad t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(t+1) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$.
(b) En déduire que f est dérivable à droite en 1.

Exercice 3Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation $x \ln(x) = n$ admet une unique solution, notée α_n , dans l'intervalle $]1; +\infty[$.
2. Justifier que : $(\forall n \geq 3) \quad \alpha_n \geq \frac{n}{\ln(n)}$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
4. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, puis que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n)}{\ln(n)} = 0$.

Exercice 4Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = nx + \ln(x)$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists ! a_n \in]0; +\infty[) \quad f_n(a_n) = 0$.
2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad f_{n+1}(a_n) > 0$.
(b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
3. (a) Établir que : $(\forall x \geq 3) \quad 1 < \ln(x) < x$.
(b) En déduire que : $(\forall n \geq 3) \quad \frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$.
(c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} na_n$.
4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = \frac{1}{a_n}$.

(a) Montrer que : $\frac{\ln(n)}{\ln(b_n)} = 1 + \frac{\ln(\ln(b_n))}{\ln(b_n)}$.

(b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(b_n)} = 1$, puis que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{\ln(n)}$.

5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

(a) Montrer que : $\frac{\ln(n)}{\ln(b_n)} = 1 + \frac{\ln(\ln(b_n))}{\ln(b_n)}$.

(b) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(b_n)} = 1$, puis calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_n}{\ln(n)}$.

Exercice 5

1. Montrer, pour tous réels x et y de $]0; +\infty[$ tels que $x < y$, que : $\frac{1}{y} \leq \frac{\ln(y) - \ln(x)}{y - x} \leq \frac{1}{x}$
2. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
3. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 6Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - a$$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad (\exists ! x_n \in]0; +\infty[) \quad f_n(x_n) = 0$.
2. (a) Établir que : $(\forall t \in]0; +\infty[) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.
(b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a - \frac{1}{x_n} < \ln \left(1 + \frac{2n}{x_n} \right) < a - \frac{1}{x_n + 2n}$.
3. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$.

Exercice 7Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$.On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = x - n \ln(x)$ On note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n , dans l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifiant : $0 < x_n < n < y_n$.
2. (a) Montrer que : $(\forall n \geq 3) \quad 1 < x_n < e$.
(b) Vérifier que : $(\forall n \geq 3) \quad f_n(x_{n+1}) > 0$.
(c) En déduire que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
(d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, puis justifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x_n)}{x_n - 1} = 1$.

3. (a) Justifier que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.
- (b) Montrer que : $(\forall n \geq 3) \quad n \ln(n) < y_n$.
- (c) Établir que : $(\forall t \in]1; +\infty[) \quad 2 \ln(t) < t$.
- (d) Déterminer le signe de $f_n(2n \ln(n))$ pour tout $n \geq 3$.
- (e) En déduire que : $n \ln(n) < y_n < 2n \ln(n)$.
- (f) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y_n)}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n^n}{n!}$

1. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.
2. (a) Établir que : $(\forall t \in]0; +\infty[) \quad t - \frac{t^2}{2} < \ln(t+1) < t$.
- (b) En déduire que : $(\forall n \geq 2) \quad n - 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \ln(u_n) < n - 1$.
3. (a) Établir que : $(\forall t \in]0; +\infty[) \quad \frac{1}{t+1} < \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t}$.
- (b) En déduire que : $(\forall t \in]1; +\infty[) \quad \ln(t+1) - \ln(t) < \frac{1}{t} < \ln(t) - \ln(t-1)$.
- (c) Montrer alors que : $(\forall n \geq 2) \quad n - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \ln(n-1) < \ln(u_n) < n - 1$.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{n}$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.
- (a) Exprimer v_n en fonction de u_n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
- (b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e$.

Exercice 9

I. Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+1) - \arctan(x)$

On note (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- (b) Montrer que la courbe (C_g) présente une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, dont on précisera la direction.
3. Étudier la branche infinie de la courbe (C_g) au voisinage de $+\infty$.
4. (a) Montrer que : $(\forall x \in] -1; +\infty[) \quad g'(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x^2+1)}$.
- (b) En déduire le sens de variations de g sur $] -1; +\infty[$.
- (c) Dresser le tableau de variations de g sur $] -1; +\infty[$.

5. (a) Montrer qu'il existe un unique réel c de $]2; 3[$ tel que : $g(c) = 0$.
- (b) En déduire le signe de g sur $] -1; +\infty[$.
6. Tracer, à main levée, la courbe (C_g) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II. Soit n un nombre entier naturel non nul :

1. Montrer que l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution, notée α_n , dans l'intervalle $] -1; +\infty[$.
2. Justifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad e^n - 1 < \alpha_n$, puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.
3. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln\left(\frac{\alpha_n + 1}{e^n}\right) = \arctan(\alpha_n)$.
- (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{e^n}$.

III. On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0; c] \\ u_{n+1} = u_n + g(u_n), n \geq 0 \end{cases}$

1. (a) Établir que : $(\forall x \in [0; +\infty[) \quad \arctan(x) \leq x$.
- (b) En déduire que : $(\forall x \in [0; +\infty[) \quad x + g(x) \geq 0$.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n < c$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 10

I. Soit φ la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $\varphi(t) = \ln(1 + \sqrt{t}) - \sqrt{t}$

1. Montrer que : $(\forall t \in]0; +\infty[) \quad (\exists c \in]0; t[) \quad \frac{\varphi(t)}{t} = -\frac{1}{2(1 + \sqrt{c})}$.
2. En déduire que : $(\forall t \in]0; +\infty[) \quad -\frac{1}{2} < \frac{\varphi(t)}{t} < -\frac{1}{2(1 + \sqrt{t})}$.
3. Montrer que : $(\forall x \in] -\infty; 0[) \quad -\frac{1}{2} < \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} < -\frac{1}{2(1-x)}$.
4. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

II. Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 0[$ par : $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(x) = \frac{x}{(1-x)\ln(1-x)} \end{cases}, x < 0$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

1. Étudier la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.
2. Montrer que f est continue à droite en 0.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur I , et que : $\begin{cases} f'_g(0) = -\frac{1}{2} \\ f'(x) = \frac{x + \ln(1-x)}{(1-x)\ln(1-x)}^2 \end{cases}, x < 0$
- (b) En déduire que f est strictement croissante sur I .

4. Tracer, à main levée, la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5. Soit n un nombre entier naturel non nul :

(a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution, notée x_n , dans l'intervalle I .

(b) Établir que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \ln(1+n) < \frac{n}{2}$.

(c) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n < -n$.

(d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

III. On considère la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 < 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \geq 0$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution, notée α , dans l'intervalle $] -\infty; 0[$.

2. (a) Établir que : $(\forall t \in]1; +\infty[) \quad t \ln(t) > t - 1$.

(b) En déduire que : $(\forall x \in]-\infty; 0[) \quad |f'(x)| < \frac{1}{2}$.

3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 0$.

4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.