Exercice 1 **Partie A** ***(20 points)***

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1 **1-** Étudier la parité de f, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

1 **2-** a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

1 b) Dresser le tableau de variations de f.

1,5 **3-** a) Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle α,
et que : $\dfrac{2}{3} < \alpha < \dfrac{7}{10}$.

0,5 b) Montrer que α est l'unique réel vérifiant $f(\alpha) = \alpha$.

1,5 **4-** Construire (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,5 **5-** a) Soit φ la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $]0, 1]$.

1 b) Construire $(C_{\varphi^{-1}})$ dans le même repère que (C_f).

Partie B

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ v_{n+1} = f(v_n)$.
On pose $I = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

0,5 **1-** a) Montrer que : $f(I) \subset I$.

0,5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ v_n \in I$.

1 **2-** a) Étudier les variations de la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

0,5 b) En déduire que : $(\forall x \in I)\ \ |f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.

1,5 **3-** a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |v_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{3}|v_n - \alpha|$.

1,5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ |v_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

0,5 c) Montrer que la suite (v_n) converge vers α.

Partie C

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction Q_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ \ Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{2k+1} - 1 = x + x^3 + \cdots + x^{2n+1} - 1$.
On remarquera que $Q_1(x) = x^3 + x - 1$.

1 **1-** Montrer que l'équation $Q_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}^+$,
et que : $0 < u_n < 1$.

0,5 **2-** a) Montrer que : $(\forall n \geq 1)\ \ Q_{n+1}(u_n) = u_n^{2n+3}$.

1 b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

1,5 **3-** Montrer que : $(\forall n \geq 1)\ \ u_n\left(1 - u_n^{2n+2}\right) = 1 - u_n^2$.

1,5 **4-** a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{2n+2} = 0$. (On pourra utiliser : $u_n \leq u_1 = \alpha$.)

0,5 b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.