

Exercice 1

On considère la fonction :
$$\begin{cases} f(x) = \pi \frac{x - \arctan x}{|\arctan x|}; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie I :

- Vérifier que f est impaire
- Étudier la continuité de f en 0
- (a) Calculer la dérivée de la fonction : $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $]0; +\infty[$
(b) En déduire que : $(\forall x > 0), \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$
(c) Montrer que la droite $(\Delta) : y = 2x + \frac{4}{\pi} - \pi$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

Partie II :

- (a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :
 $(\forall x > 0), 0 < \frac{x - \arctan x}{x} < \frac{x^2}{1 + x^2}$
(b) En déduire que : $(\forall x > 0), \arctan x > \frac{x}{1 + x^2}$
- Étudier la dérivabilité de f en 0 à droite, puis interpréter le résultat graphiquement
- Calculer $f'(x)$ pour tous $x \in]0; +\infty[$, puis tracer le tableau de variation de f
- Tracer (C_f)

Exercice 2

On considère la fonction : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} - \arctan x$

Partie I :

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Calculer $f'(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$, puis tracer le tableau de variation de f
- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}), |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f''(x) = \frac{4x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$, puis déterminer les points d'inflexion
- Tracer (C_f)

Partie II : On considère la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n); n \geq 0 \end{cases}$$

- Montrer que : $(\exists! \alpha \in \mathbb{R}) \quad f(\alpha) = \alpha$
- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

﴿وَكَذَلِكَ أَنزَلْنَاهُ آيَاتٍ بَيِّنَاتٍ وَأَنَّ اللَّهَ يَهْدِيَ مَن يُرِيدُ﴾ (16) • إِنَّ الَّذِينَ ءَامَنُوا وَالَّذِينَ هَادُوا وَالصَّالِحِينَ وَالنَّصَارَى وَالْمَجُوسَ
وَالَّذِينَ أَشْرَكُوا إِنَّ اللَّهَ يَفْصِلُ بَيْنَهُمْ يَوْمَ الْقِيَمَةِ إِنَّ اللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ شَهِيدٌ (17) • أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ يَسْجُدُ لَهُ مَن فِي السَّمَوَاتِ وَمَن
فِي الْأَرْضِ وَالشَّمْسُ وَالْقَمَرُ وَالنُّجُومُ وَالْجِبَالُ وَالشَّجَرُ وَالدَّوَابُّ وَكَثِيرٌ مِّنَ النَّاسِ ۚ وَكَثِيرٌ حَقَّ عَلَيْهِ الْعَذَابُ ۚ وَمَن يُهِنِ اللَّهُ فَمَا لَهُ
مِنْ مُّكْرِمٍ ۚ إِنَّ اللَّهَ يَفْعَلُ مَا يَشَاءُ ﴿﴾ (18) • ﴿الحج الآيات 16-18﴾