MTM
GROUP

MATHÉMATIQUES

Examens du Baccalauréat

Sujets des Examens Nationaux du

Baccalauréat Marocain

Section :

❖ Sciences Mathématiques

Réalisation :

Maroc Tex Maths GROUP

VERSION 2

DROIT D'AUTEUR

Première Version :Mai 2023

Titre du livret

SUJETS DES EXAMENS NATIONAUX DU BACCALAURÉAT MAROCAIN SCIENTIFIQUE

APERÇU

Ce livret est une collection d'examens nationaux, de MATHÉMATIQUES, des années entre ***2008*** et ***2022***, pour les branches scientifiques,

(Sciences et Technologies ; Sciences Mathématiques ; et Sciences Économiques),.

Ce livret est le fruit d'une collaboration des membres du groupe [$MTMgroup$],

(**voir liste sur la fin de ce livre**),

constitué d' *inspecteurs* et de *professeurs* de **Mathématiques aux Maroc**.

MTM GROUP

Baccalauréat Sciences mathématique

Table des matières

⋆ROYAUME DU MAROC ⋆

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2008

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,25 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3,75 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10,00 points**

Exercice 1 : (3,25 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&\sqrt{3}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&\sqrt{3}b\\-\frac{1}{\sqrt{3}}b&a\end{pmatrix}\diagup a,b\in\mathbb{R}\right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0.50 pt **b)** Montrer que la famille (I,J) est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b)\end{array}$ où : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.50 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.50 pt **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J\times X^3=I$ (où $X^3=X\times X\times X$)

Exercice 2 : (3,75 pts)

Soit a un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ le conjugué du nombre a.

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(G): iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$

0.50 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (G) est : $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$

0.50 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (G).

0.50 pt **2 -** Montrer que a est une solution de l'équation (G) si, et seulement si : $\Re e(a)=\Im m(a)$
(où $\Re e(a)$ est la partie réel du complexe a et $\Im m(a)$ est la partie imaginaire du complexe a)

Partie II:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$ et on suppose que $\Re e(a)\neq\Im m(a)$.
On considère les points A et B et C d'affixes respectives : a et $i\overline{a}$ et $1+ia$.

1 - On pose : $Z=\frac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$

0.50 pt **a)** Vérifier que : $\overline{Z}=\frac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

0.50 pt **b)** Montrer que les points A et B et C sont alignés si, et seulement si : $\Im m(a)=\frac{1}{2}$

2 - On suppose dans cette question que $\Im m(a)\neq\frac{1}{2}$
On considère R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$.
Soit E le milieu du segment $[BC]$.

0.50 pt **a)** Déterminer b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

0.50 pt **b)** Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C'=2AE$

Exercice 3 : (3 pts)

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E): 35u-96v=1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11,4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0.50 pt **2 -** Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie II:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $(F): x^{35}\equiv 2[97]$

1 - Soit x une solution de l'équation (F).

0.50 pt **a)** Montrer que 97 est premier et que x et 97 sont premiers entre eux.

0.50 pt **b)** Montrer que : $x^{96} \equiv 1[97]$

0.50 pt **c)** Montrer que : $x \equiv 2^{11}[97]$

0.25 pt **2 -** Montrer que si l'entier naturel x vérifie $x \equiv 2^{11}[97]$, alors x est solution de l'équation (F).

0.25 pt **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent sous la forme : $11+97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I:

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.50 pt **1 - a)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-2x)$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

0.50 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau des variations de f.

0.50 pt **c)** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$ et que $0<\alpha<1$.

0.50 pt **d)** Étudier le signe de $f(x)$ dans l'intervalle $[0;1]$.

0.50 pt **2 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 0,4$)

Partie II:

On considère les deux fonctions φ et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \ ; \quad x>0 \\ \varphi(0)=1 \end{cases}$$

0.50 pt **1 - a)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)(\exists c \in]0;x[)$; $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = e^{-c^2}$

0.50 pt **b)** Déduire que : $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t < 1$

0.50 pt **2 - a)** Montrer que : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t$

0.50 pt **b)** Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)$; $g'(x) = f(x)$

0.50 pt **c)** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]\alpha;1[$.

0.50 pt **3 - a)** Montrer que la fonction φ est continue à droite en 0.

0.50 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \ ; \quad \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

0.75 pt **c)** Montrer que la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \ ; \quad \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

0.50 pt **d)** Montrer que : $\varphi([0;1]) \subset [0;1]$

0.50 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$ on a : $\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^3}{3}$

0.50 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in]0;1[)$; $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{3}$

0.25 pt **c)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)$; $\varphi(x) = x \Longleftrightarrow g(x) = 0$

5 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \varphi(u_n) \ ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 & = \frac{2}{3} \end{cases}$$

0.50 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

0.50 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

0.50 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2008

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3,50 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** .... **4,00 points**
— Exercice 3 : **Probabilité** .... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10,00 points**

Exercice 1 : (3,50 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère l'application r qui associe un point $M(z)$ à un point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Et l'application h qui associe un point $M(z)$ à un point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$
On pose : $F = h \circ r$

1.00 pt **1 -** Déterminer la nature de chacune des deux applications r et h et leurs éléments caractéristiques.

2 - On considère les deux points $\Omega(i)$ et $A(a)$ avec a un nombre complexe donné différent de i.
On pose : $B = F(A)$ et $C = F(B)$ et $D = F(C)$

0.50 pt **a)** Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application F alors :

$$z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$$

0.25 pt **b)** Vérifier que Ω est l'unique point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$

0.75 pt **3 - a)** Déterminer en fonction du nombre complexe a les complexes b et c et d les affixes respectives de B et C et D.

0.50 pt **b)** Montrer que les points Ω et A et D sont alignés.

0.50 pt **c)** Montrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.

0.25 pt **d)** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartient à l'axe des réels.

Exercice 2 : (4 pts)

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \; ; \quad x * y = x + y - 3xy$$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)$; $(1-3x)(1-3y) = 1 - 3(x*y)$

0.75 pt **b)** Montrer que $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right)$ est un groupe abélien.

0.50 pt **2 - a)** Montrer que l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star; \times) \\ x & \longmapsto & 1-3x \end{array}$ est un isomorphisme.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right) = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$

0.50 pt **c)** Montrer que $\left(\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[; *\right)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right)$.

3 - Pour chaque x de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

0.25 pt **a)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right); (\forall n \in \mathbb{N})$; $\phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n$

0.50 pt **b)** En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

4 - On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \; ; \quad x \top y = x + y - \frac{1}{3}$$

0.50 pt **a)** Montrer que $(\mathbb{R}; \top)$ est un groupe abélien.

0.50 pt **b)** Montrer que : $(\mathbb{R}; \top; *)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (2,5 pts)

Un urne contient 4 boules : une boule blanche, 3 boules rouges indiscernables au toucher.
On tire aléatoirement une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet à l'urne.
On répète la même expérience plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois deux boules successives de même couleur et on arrête l'expérience.
Soit X la variable aléatoire qui vaut le rang du tirage où on a arrêté l'expérience.

1,00 pt **1 -** Calculer la probabilité des deux événements suivants : $[X=2]$ et $[X=3]$.

2 - Soit k un entier naturel non nul.

0,75 pt **a)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k]$ est : $P_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0,75 pt **b)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X=2k+1]$ est : $P_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I:

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{x} \ ; \quad x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

0.50 pt **1 -** Montrer que la fonction f est continue en 0.

2 - Pour tout réel non nul a de l'intervalle I, on considère la fonction numérique h_a de variable réelle x définie sur l'intervalle I par :

$$h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)\,x^2-(\ln(1+2x)-2x)\,a^2$$

0.50 pt **a)** Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ puis déduire qu'il existe un réelle b compris entre 0 et a tel que :

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

0.75 pt **b)** En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que : $f'(0)=-2$

0.50 pt **3 - a)** Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $I\setminus\{0\}$ et que :

$$(\forall x\in I\setminus\{0\}) \ ; \quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)} \quad \text{avec} \quad g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$

0.50 pt **b)** Montrer que : $(\forall x\in I\setminus\{0\}) \ ; \ g(x)<0$

0.25 pt **c)** En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

0.50 pt **4 - a)** Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\longrightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter les deux résultats obtenus géométriquement.

0.50 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$

0.50 pt **c)** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha\approx 1,3$)

Partie II:

1 - On considère la fonction ϕ définie sur l'intervalle I par : $\phi(x) = \ln(1+2x)$
et on pose $J = [1;\alpha]$

0.50 pt **a)** Montrer que la fonction ϕ est dérivable sur l'intervalle I et que :

$$(\forall x \geqslant 1) \ ; \quad 0 < \phi'(x) \leqslant \frac{2}{3}$$

0.75 pt **b)** Vérifier que : $\phi(\alpha) = \alpha$ et que : $\phi(J) \subset J$

2 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = \ln(1+2u_n) \ ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 & = 1 \end{cases}$$

0.50 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \quad u_n \in J$

0.50 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$

0.50 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie III:

On considère la fonction numérique F définies sur l'intervalle I par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

0.50 pt **1 - a)** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I puis calculer $F'(x)$

0.25 pt **b)** Déduire les variations de la fonction F sur l'intervalle I.

0.50 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geqslant 1) \ ; \quad F(x) \geqslant \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,\mathrm{d}t$

0.50 pt **b)** Déduire que : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = +\infty$

3 - On suppose que la fonction F admet une limite finie l à droite en $-\frac{1}{2}$.
On considère la fonction $\tilde{F}$ définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x) \ ; \quad x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = l \end{cases}$$

0.50 pt **a)** En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in I) \ ; \quad F(x) - l \geqslant f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

0.50 pt **b)** Déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $-\dfrac{1}{2}$.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2009

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,00 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4,00 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10,00 points**

Exercice 1 : (3 pts)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices carrées $M(x;y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$.

0,50 pt **b)** Montrer que $(\mathcal{F};\times)$ est un groupe non commutatif.

2 - Soit G l'ensemble des matrices $M(x;0)$ de $\mathcal{F}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

1,00 pt Montrer que l'ensemble G est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F};\times)$.

3 - On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit l'ensemble E de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall (x;y) \in E)(\forall (a;b) \in E) \;;\; (x;y) \perp (a;b) = (ax; bx + \frac{y}{a})$$

et on considère l'application $\begin{array}{llll} \phi: & (\mathcal{F};\times) & \longrightarrow & (E;\perp) \\ & M(x,y) & \longmapsto & \phi(M(x;y)) = (x,y) \end{array}$

0,25 pt **a)** Calculer $(1;1) \perp (2;3)$ et $(2;3) \perp (1;1)$.

0,50 pt **b)** Montrer que ϕ est un isomorphisme.

0,50 pt **c)** En déduire la structure de $(E;\perp)$.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit m un nombre complexe différent de 1.

I) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\;:\; z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

0,25 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,50 pt **c)** Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs du complexe m afin que le produit des deux solutions de l'équation (E) est égal à 1.

2 - On pose $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

1,00 pt Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

II) Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$

On considère les points M , M_1 et M_2 d'affixes respectivement m ; $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

0,50 pt **1 -** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points M , M_1 et M_2 soient alignés.

0,50 pt **a)** Montrer que la transformation R reliant chaque point M d'affixe z au point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe de son centre Ω et une mesure de son angle.

0,50 pt **b)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est un imaginaire pure si et seulement si $\Re e(m) + \Im m(z) = 1$.

0,50 pt **c)** En déduire l'ensemble des points M tel que les points Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

Pour tout n entier naturel non nul, on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_n est pair.

0,50 pt **b)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $a_n \equiv 0\,[3]$

2 - Soit p un entier premier tel que : $p > 3$

0,75 pt **a)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\,[p]$, $3^{p-1} \equiv 1\,[p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\,[p]$

0,75 pt **b)** Montrer que l'entier p divise a_{p-2}

0,75 pt **c)** Montrer que pour tout entier naturel q, il existe un entier naturel non nul n tel que :

$$a_n \wedge q = q$$

($a_n \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de a_n et q)

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I :

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x(1-\ln(x))^n & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité $2cm$)

0,50 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f_n est continue à droite au point 0. (poser $x = t^n$)

0,25 pt **b)** Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite au point 0.

1,00 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

0,50 pt **2 - a)** Étudier les variations de la fonction f_1.

0,50 pt **b)** Étudier les variations de la fonction f_2.

0,25 pt **3 - a)** Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

0,50 pt **b)** Construire les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.
(On admet que le point $A(1;1)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_2)$).

Partie II :

On considère la fonction F définie sur $]-\infty;0]$ par : $F(x) = \displaystyle\int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

0,50 pt **1 - a)** Montrer que F est dérivable sur $]-\infty;0[$ et que : $(\forall x < 0)$: $F'(x) = \dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

0,25 pt **b)** En déduire le sens de variations de la fonction F sur $]-\infty;0]$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x < 0)$: $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt$

0,25 pt **b)** Vérifier que la fonction $x \mapsto x^2\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{\ln(x)}{2}\right)$ est une primitive de la fonction f_1 sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_{e^x}^{1} f_1(t)dt = \dfrac{3}{4}$

3 - On suppose que la fonction F admet une limite finie L quand x tend vers $-\infty$.

0,25 pt Montrer que $\dfrac{3}{8} \leqslant L \leqslant \dfrac{3}{4}$.

Partie III :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $U_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$

0,50 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 1)$; $U_n \geqslant 0$

0,50 pt **b)** Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur l'intervalle $[1;e]$.

0,25 pt **c)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 1)$; $U_{n+1} \leqslant U_n$.

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

0,50 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 1)\ ;\ U_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2}U_n$

0,50 pt **b)** En déduire en cm^2 l'aire du domaine délimité par les deux courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 2)\ ;\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{1}{n-1}$

0,50 pt **b)** Calculer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.

4 - Soit a un nombre réel différent de U_1.

On considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} V_1 = a \\ V_{n+1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{n+1}{2}V_n\ ;\quad (\forall n \geqslant 1) \end{cases}$ et pour tout entier naturel n non nul, on pose : $d_n = |V_n - U_n|$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 1)\ :\ d_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}}d_1$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 2)\ :\ \dfrac{n!}{2} \geqslant 3^{n-2}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = +\infty$

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2009

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,00 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4,00 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10,00 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I_2 et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels a et b : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$, et soit $V = \left\{M_{(a;b)} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

0,75 pt **1 -** Montrer que V est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;.)$ et déterminer une base de V.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que l'ensemble V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});\times)$

0,50 pt **b)** Montrer que $(V;+;\times)$ est un anneau commutatif unitaire.

0,25 pt **3 - a)** Calculer $M_{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$.

0,25 pt **b)** L'anneau $(V;+;\times)$ est-il un corps ?

4 - Soit X une matrice de l'ensemble V telle que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

0,50 pt **a)** Montrer que $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I_2 = 0$

b) On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$

0,50 pt Montrer que la matrice X admet un inverse dans V qu'on déterminera.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit u un nombre complexe différent de $(1-i)$.

0,25 pt **1 - a)** Développer $(iu-1-i)^2$.

0,75 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :(E) : $z^2 - 2(u+1-i)z + 2u^2 - 4i = 0$

2 - Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Soient les points $A((1+i)u-2i)$, $B((1-i)u+2)$, $U(u)$ et $\Omega(2-2i)$

0,50 pt **a)** Déterminer l'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation t qui transforme U au point I.

0,50 pt **b)** Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $R(A) = B$.

0,50 pt **c)** En déduire que les droite (ΩI) et (AB) sont perpendiculaires.

0,75 pt **d)** A partir du point U , expliquer une méthode de construction des points A et B.

3 - On pose $u = (1+i)a - 2i$ tel que : $a \in \mathbb{R}$

0,50 pt **a)** Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a.

0,25 pt **b)** En déduire que les points A , B et U sont alignés.

Exercice 3 : (3 pts)

n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On a trois urnes U_1, U_2 et U_3
L'urne U_1 contient une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.
L'urne U_2 contient n deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.
L'urne U_3 contient n trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On choisit aléatoirement une urne parmi les trois urnes précédentes, puis on en tire simultanément deux boules.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

0,25 pt **1 -** Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $P[X=2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$

0,75 pt **b)** Montrer que $P[X = 1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

0,50 pt **c)** En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,75 pt **3 -** Sachant que les deux boules tirées sont rouges , quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

0,50 pt **1 - a)** Étudier les variations de la fonction g

0,50 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction g.

0,50 pt **2 - a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α de l'intervalle $]\ln(4); \ln(6)[$. (On prend $\ln(4) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$)

0,50 pt **b)** Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3 - On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} U_{n+1} & = 2\left(1 - e^{-U_n}\right) \;;\quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 & = 1 \end{cases}$

0,50 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leqslant U_n < \alpha$.

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_{n+1} - U_n = g(U_n)$.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,50 pt **d)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1,00 pt **1 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

0,50 pt **2 - a)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha - 2)}$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)e^x}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,50 pt **3 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 1,5$)

Partie III :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1 - e^t}{t^2}\, dt \;;\quad (\forall x > 0) \\ F(0) = -\ln(2) \end{cases}$$

0,50 pt **1 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x > 0)\;\; F(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2x} - \frac{e^x - 1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt$$

0,50 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $e^x \ln(2) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt \leqslant e^{2x} \ln(2)$

0,50 pt **c)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\, dt$ puis en déduire que F est continue à droite au point 0.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $F(x) \leqslant \dfrac{1-e^x}{2x}$

0,25 pt **b)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,50 pt **3 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0)\ ;\ F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

4 - a) Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$

0,75 pt Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0;x[$ tel que : $F(x)-F(0) = -\dfrac{1}{2}xe^{2c}$

(Utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0,25 pt **b)** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $-\dfrac{1}{2}e^{2x} \leqslant \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et que : $F'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2010

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,50 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3,50 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3,00 points**
- Exercice 4 : **Analyse** .... **6,25 points**
- Exercice 5 : **Analyse** .... **3,75 points**

Exercice 1 : (3,50 pts)

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I :

On munit l'ensemble $I =]0;+\infty[$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall(a;b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

0,50 pt **1 -** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative sur I.

0,25 pt **2 -** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre ε dans I à déterminer.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $(I\backslash\{1\}, *)$ est un groupe commutatif. ($(I\backslash\{1\})$ désigne l'ensemble I privé de 1)

0,25 pt **b)** Montrer que $J =]1;+\infty[$ est un sous-groupe de $(I\backslash\{1\}, *)$.

4 - On munit I de la loi de composition interne $\times$ ($\times$ est la multiplication dans $\mathbb{R}$).

0,25 pt **a)** Montrer que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi $\times$.

0,50 pt **b)** Montrer que $(I, \times, *)$ un corps commutatif.

Partie II :

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

0,50 pt **1 -** Calculer A^2 et A^3.

0,50 pt **2 -** En déduire que la matrice A est non inversible.

Exercice 2 : (3,50 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O, \vec{u}, \vec{v})$.

0,25 pt **1 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre complexe : $3+4i$.

0,50 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): \ 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$

2 - Soient a et b les solutions de l'équation (E) avec $\mathrm{Re}(a) < 0$ et les deux points A et B d'affixes respectives a et b dans le plan complexe.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\dfrac{b}{a} = 1 - i$.

0,75 pt **b)** En déduire que le triangle AOB est rectangle et isocèle en A.

3 - Soient C un point d'affixe c du plan différent du point A et D l'image du point B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; et soit L l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$.

0,50 pt **a)** Déterminer en fonction de c le complexe d l'affixe du point D.

0,50 pt **b)** Déterminer en fonction de c le complexe l l'affixe du point L.

0,75 pt **c)** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{l-c}{a-c}$ puis en déduire la nature du triangle ACL .

Exercice 3 : (3,00 pts)

1,00 pt **1 -** Déterminer tous les nombres entiers naturels m tels que : $m^2 + 1 \equiv 0 \ [5]$.

2 - Soit p un nombre premier tel que : $p = 3 + 4k$ où k est un entier naturel.
soit n un entier naturel tel que : $n^2 + 1 \equiv 0 \ [p]$.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1 \ [p]$

0,50 pt **b)** Montrer que n et p sont premiers entre eux.

0,75 pt **c)** En déduire que : $\left(n^2\right)^{2k+1} \equiv 1 \ [p]$

0,50 pt **d)** Déduire de ce qui précède qu'il n'existe aucun entier naturel n vérifiant : $n^2+1 \equiv 0 \ [p]$.

Exercice 4 : (6,25 pts)

Partie I :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 4xe^{-x^2}$.
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

0,50 pt **1 -** Calculer la limite de f en $+\infty$.

0,75 pt **2 -** Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0,75 pt **3 -** Déterminer l'équation de la demi-tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ à l'origine du repère puis construire la courbe $(\mathcal{C})$. (on prend $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2$ cm Et on admet que le point d'abscisse $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$).

0,50 pt **4 -** Calculer l'intégrale $a = \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$ puis en déduire en cm^2 l'aire de la partie plane limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les deux axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Partie II :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction numérique f_n définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$.

0,25 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x > 1);\quad e^{-x^2} < e^{-x}$.

0,25 pt **b)** En déduire la limite de la fonction f_n quand x tend vers $+\infty$.

0,75 pt **2 -** Étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0,50 pt **3 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique u_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f_n(u_n) = 1$.

0,25 pt **4 - a)** Vérifier que : $(\forall n \geqslant 2);\quad f_{n+1}(u_n) = u_n$.

0,75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

5 - On pose : $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

0,25 pt **a)** Montrer que : $0 < l \leqslant 1$.

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2);\quad -\dfrac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(4)}{n}$.

0,50 pt **c)** En déduire que : $l = 1$.

Exercice 5 : (3,75 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$.

0,25 pt **1 -** Montrer que F est impaire.

2 - Pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on pose : $\varphi(x) = \int_1^x \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $(\forall x > 0);\quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

0,50 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

0,50 pt **c)** En déduire le sens de variations de la fonction F sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,50 pt **3 - a)** En utilisant le théorème des accroissement finis, montrer que :

$$(\forall x > 0)(\exists c \in]x;2x[) : \quad F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$$

0,25 pt **b)** En déduire que : $(\forall x > 0);\quad \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$

0,75 pt **c)** Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

0,75 pt **d)** Vérifier que : $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ et $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$

Puis déduire que l'équation $F(x) = x$ admet une solution unique dans $]0;+\infty[$.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2010

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,00 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **4,00 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3,00 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10,00 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

0,50 pt **1 -** Montrer que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 pt **2 - a)** Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.

0,50 pt **b)** En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0,50 pt **c)** Déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$ pour tout réel x.

0,50 pt **d)** Résoudre dans l'ensemble E l'équation : $A^5X = B$ où $A = M(2)$ et $B = M(12)$ et $A^5 = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{\text{5 fois}}$

0,50 pt **3 -** Montrer que l'ensemble $F = \left\{ M(\ln(x)) / x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$ est un sous-groupe de $(E,\times)$.

Exercice 2 : (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) :\ z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

0,50 pt **a)** Vérifier que le nombre $a = 1 + i\left(2-\sqrt{3}\right)$ est une solution de l'équation (E).

0,50 pt **b)** En déduire b la deuxième solution de l'équation (E).

0,50 pt **2 - a)** Montrer que : $a^2 = 4\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,75 pt **b)** Écrire a sous forme trigonométrique.

3 - On considère les points A , B et C dont les affixes sont respectivement a, b et $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.
Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$.

0,50 pt **a)** Déterminer ω, l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

0,50 pt **b)** Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ).

0,75 pt **c)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est un imaginaire pur.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On tire les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules tirées.

0,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

0,50 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$.

0,50 pt **c)** Montrer que : $p[X=2] = \dfrac{5}{33}$

0,50 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0,50 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(x) = \dfrac{13}{11}$

0,75 pt **b)** Calculer $E\left(X^2\right)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (10pts)

Partie I :

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = [0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ; 0 \leq x < 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0,50 pt **1 -** Montrer que f est continue à gauche au point 1.

0,50 pt **2 -** Étudier la dérivabilité de f à gauche au point 1.

0,75 pt **3 -** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis dresser son tableau de variations.

0,50 pt **4 - a)** Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\dfrac{e-1}{e}$.

0,75 pt **b)** Tracer la courbe (C) en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0. (on prend $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)

0,50 pt **5 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha) = \alpha$

0,25 pt **6 - a)** Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers I.

0,50 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle I.

Partie II :

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, et pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$

0,75 pt **1 - a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,75 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 0)$; $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

Partie III :

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $J = [0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul on pose : $F_0(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$; $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$; $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$

1,00 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in J)$; $F(x) - S_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$

0,50 pt **2 - a)** Montrer que la fonction $x \mapsto (1-x)(1-\ln(1-x))$ est strictement décroissante sur J.

0,50 pt **b)** Déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0;x]$ pour $x \in J$.

1,00 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $(\forall x \in J)$; $0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

0,50 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle J on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = F(x)$

0,50 pt **4 - a)** Déterminer $F(x)$ pour $x \in J$.

0,25 pt **b)** Déterminer la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x)$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2011

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **2.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Exercice d'analyse** .... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Exercice d'analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (4 pts) (Les deux parties sont indépendantes)

Partie I : Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ on considère les deux matrices :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0=I$ $\quad A^1=A$ $\quad A^2=A\times A$ $\quad A^{n+1}=A^n\times A$ pour tout n de $\mathbb{N}$)

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall k\in\mathbb{N})\,;\ A^{2k}=I$.

0,5 pt **2 -** Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Partie II : Soit a un nombre réel .

Pour tout x et y de l'intervalle $I=]a;+\infty[$ on pose : $x*y=(x-a)(y-a)+a$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

0,5 pt **b)** Montrer que $*$ est une loi commutative et associative.

0,5 pt **c)** Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0,5 pt **2 -** Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère l'application : $\begin{array}{rcl}\phi\ :\ I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^*\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a}\end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(I,*)$ vers $\left(\mathbb{R}_+^*,\times\right)$.

0,5 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)}=a^3+a$ où $x^{(3)}=x*x*x$.

Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N=\underbrace{11.............1}_{2010\text{ fois }1}$

0,25 pt **1 -** Montrer que le nombre N est divisible par 11 .

0,75 pt **2 - a)** Vérifier que le nombre 2011 est premier et que : $10^{2010}-1=9N$.

0,5 pt **b)** Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$.

0,5 pt **c)** En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N .

0,5 pt **3 -** Montrer que le nombre N est divisible par 22121.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Première Partie : Soit m un nombre complexe non nul. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnu z :

$(E_m)\ :\ z^2+[(1-\mathrm{i})m-4]z-\mathrm{i}m^2-2(1-\mathrm{i})m+4=0$.

0,5 pt **1 -** Vérifier que le nombre $z_1=-m+2$ est solution de l'équation (E_m) .

2 - Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m) .

0,5 pt **a)** Montrer que : $z_1.z_2=1 \Longleftrightarrow im^2+2(1-\mathrm{i})m-3=0$.

1 pt **b)** Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1.z_2=1$.

Deuxième Partie : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère l'application S qui au point M, d'affixe z , fait correspondre le point M' d'affixe z' , tel que : $z'-1=-(z-1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+\mathrm{i})$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et soit z'' l'affixe du point $M''=R(M)$.

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1 .

0,25 pt **b)** Montrer que : $z''=\mathrm{i}z+2$

2 - Soit A le point d'affixe 2 . On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0,5 pt **a)** Calculer : $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0,5 pt **b)** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A , Ω , M' et M'' sont cocycliques.

Exercice 4 : (6.5 pts)

Première Partie : Étude des solutions positives de l'équation $(E):\mathrm{e}^x=x^n$ **avec** n **un entier naturel non nul.**

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D=[0;1[\bigcup]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que pour tout x de l'ensemble $D=[0;1[\bigcup]1;+\infty[$ on a : $\mathrm{e}^x=x^n \Longleftrightarrow n=f(x)$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0 .

1,5 pt **3 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,75 pt **4 -** Étudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **5 -** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées

0,5 pt **6 -** Représenter graphiquement $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **7 -** Montrer que pour $n\geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1<a_n<\mathrm{e}<b_n$.

Deuxième Partie : Étude des deux suites $(a_n)_{n\geq3}$ **et** $(b_n)_{n\geq3}$ **.**

0,5 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n\geq3)$; $b_n\geq n$, en déduire la limite de la suite $(b_n)_{n\geq3}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\geq3)$; $\dfrac{1}{n}<\ln(a_n)<\dfrac{\mathrm{e}}{n}$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n=\mathrm{e}$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère le fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x\geq0)$; $0\leq F(x)\leq x\mathrm{e}^{-x^2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x\geq1)$; $\mathrm{e}^{-x^2}\leq\mathrm{e}^{-x}$, en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que :
$(\forall x\geq0)\quad F^{'}(x)=\mathrm{e}^{-2x^2}-2xF(x)$.

3 - On considère la fonction G définie sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \ \ si \ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ G(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

0,75 pt **b)** Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $F^{'}(c) = 0$ et que : $F(c) = \dfrac{e^{-2c^2}}{2c}$.

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction G sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$)

4 - On considère la fonction numérique H définie sur $]0;+\infty[$ par : $H(x) = F^{'}(x)\dfrac{e^{x^2}}{2x}$.

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variations de F .

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2011

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **2.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **4 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **6 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5pts)

Soit x et y deux nombres de l'intervalle $I =]0,1[$, on pose $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur I.

0.5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 pt **c)** Montrer que $(I, *)$ admet un élément neutre à déterminer.

0.5 pt **2 -** Montrer que $(I, *)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère les deux ensembles suivants : $\mathbb{H} = \{2^n / n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{K} = \left\{\dfrac{1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

0.5 pt **a)** Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

b) On considère l'application φ définie par : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{array}$

0.5 pt Montrer que l'application φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{H}, \times)$ dans $(I, *)$.

0.5 pt **c)** Déduire que $(\mathbb{K}, *)$ est un sous groupe du groupe $(I, *)$.

Exercice 2 : (2.5 pts)

Soit x un nombre entier naturel vérifiant $10^x \equiv 2[19]$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$.

2 - Soit d le pgcd des nombres 18 et $x+1$

0.75 pt **a)** Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $d = 18$.

0.5 pt **c)** Déduire que : $x \equiv 17[18]$.

Exercice 3 : (4 pts)

Partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante (E) : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

0.5 pt **1 -** Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E).

0.5 pt **2 -** Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0.5 pt **3 - a)** Déterminer les deux racines carrées du nombre $5 - 12i$.

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B, et C d'affixes respectifs $a = -1 + 3i$, $b = -2i$ et $c = 2 + i$.

0.5 pt **1 -** Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

2 - On considère la rotation $\mathcal{R}_1$ de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation $\mathcal{R}_2$ de centre A et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$. Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation $\mathcal{R}_1$ et M_2 son image par la rotation $\mathcal{R}_2$

0.5 pt **a)** Vérifier que l'écriture complexe de la rotation $\mathcal{R}_1$ est $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$.

0.5 pt **b)** Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z.

0.5 pt **c)** Déduire que le point I, le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. (On prend : $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1\text{cm}$)

1 pt **1 -** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

0.25 pt **2 - a)** Donner le tableau de variation de la fonction f.

0.75 pt **b)** Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer, puis donner le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1}.

0.75 pt **3 -** Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire (C) et (C') la courbe représentative de la fonction f^{-1} dans le même repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

0.5 pt **4 - a)** Calculer l'intégral $\int_1^{1+e} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. (On peut poser : $t = f^{-1}(x)$)

0.5 pt **b)** Déduire l'aire du domaine plan limité par (C^{-1}) et les droites $x = 1$, $x = e+1$ et $y = x$.

5 - pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation (E_n) : $x + \ln x = n$

0.25 pt **a)** Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n.

0.5 pt **b)** Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

0.5 pt **6 - a)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $f(x_n) \leq f(n)$ puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $x_n \leq n$.

0.5 pt **b)** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $n - \ln n \leq x_n$

0.5 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$.

Exercice 5 : (4 pts)

Soient n un entier non nul et f_n une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0.5 pt **1 -** Montrer que pour $n \geq 2$, il existe un unique réel α_n de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

0.75 pt **2 -** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq2}$ est strictement décroissante et déduire qu'elle est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que pour $t \neq 1$, On a : $1 + t + t^2 + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$.

0.5 pt **b)** Déduire que $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \cdots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 \leq \displaystyle\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$.

0.75 pt **c)** En déduire que $l = 1 - e^{-1}$, où $l = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \alpha_n$.

$$\boxed{\text{FIN}}$$

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2012

MATHÉMATIQUES

★ROYAUME DU MAROC ★

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétique** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **5.5 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **4.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

I - Dans l'anneau unitaire $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$, on considère les deux matrices

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

0,75 pt **1 -** Calculer $I-A$ et A^2.

0,5 pt **2 -** En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera.

II - Pour tout a et b de l'intervalle $I=]1;+\infty[$, on pose $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$.

0.5 pt **2 -** Montrer que $*$ et une lois de composition interne dans I.

3 - On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{*+} & \to & I\\ & \mapsto & \sqrt{x+1}\end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(I,*)$

0,25 pt **b)** En déduire la structure de $(I,*)$.

0,75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $\Gamma=\{\sqrt{1+2^m}\,/\,m\in\mathbb{R}\}$ est un sous groupe de $(I,*)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

I - Soit a est un nombre complexe non nul, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E): iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$$

0,75 pt **1 -** Déterminer z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E).

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

0,5 pt **b)** Montrer que : z_1z_2 est un nombre réel $\Longleftrightarrow$ $\arg a \equiv \dfrac{-3\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$.

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul

On considère les points A,B,C,D et M d'affixes respectives $1,\ 1+i,\ c,\ ic$ et z.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que A,D et M sont alignés $\Longleftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$ (remarquer que $c=\bar{c}$)

0,5 pt **b)** Montrer que : $(AD)\perp(OM)\Longleftrightarrow(ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$.

2 - Soit h l'affixe du point H, le projeté orthogonal du point O sur (AD).

0,75 pt **a)** Montrer que : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(CH)\perp(BH)$.

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 143x-195y=52$

0,5 pt **a)** Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195, puis déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

0,75 pt **b)** Sachant que $(-1;-1)$ est une solution particulière de l'équation (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2 - Soit n un entier naturel non nul premier avec 5.

0,5 pt Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $n^{4k}\equiv 1[5]$.

3 - Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x \equiv y\,[4]$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y\,[5]$.

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x \equiv n^y\,[10]$.

4 - Soient x et y deux entiers naturels tel que (x,y) est solution de l'équation (E).

0,25 pt Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

Exercice 4 : (5.5 pts)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \dfrac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

0,5 pt **2 - a)** Étudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D).

0,75 pt **3 -** Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

0,75 pt **4 -** Construire la courbe (C_3). (On prend $f_3(-0,6) \simeq 0$ et $f_3(-1,5) \simeq 0$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)

0,25 pt **5 - a)** Montrer que pour $n \geqslant 3$ on a : $\dfrac{e}{n} < \ln n$

1 pt **b)** Montrer que pour $n \geqslant 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x \leqslant -\ln n$ et $\dfrac{-e}{n} \leqslant y_n \leqslant 0$.

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

6 - On considère la fonction numérique g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ ; \ x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$

0,25 pt **a)** Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

0,25 pt **b)** Vérifier que pour $n \geqslant 3$ on a : $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right) = \dfrac{\ln n}{x_n}$.

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{x_n}$.

Exercice 5 : (4.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0\,;1]$ par :

$$F(0) = 1 \ \text{ et } F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \ \text{ si } x > 0$$

0,25 pt **1 -** Soit x un élément de $[0;1]$, montrer que pour tout t de $[0;x]$ on a : $\dfrac{1}{1+2x} \leqslant \dfrac{1}{1+2t} \leqslant 1$

2 - Soit x un élément de $]0\,;1]$

0,5 pt **a)** Montrer que $F(x) = \dfrac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{1+2t}\mathrm{d}t$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{1}{1+2x} \leqslant F(x) \leqslant 1$, et en déduire que F est continue à droite en 0.

0,75 pt **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0\,;1]$ on a :

$$\int_0^x \frac{2t}{1+2t}\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+2x} + 2\int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t$$

4 - Soit x un élément de $]0\,;1]$

0,5 pt **a)** Montrer que $F'(x) = -\dfrac{4}{x^3}\int_0^x \left(\dfrac{t}{1+2t}\right)^2 \mathrm{d}t$

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{-4}{3} \leqslant F'(x) \leqslant \dfrac{-4}{3(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1)

0,75 pt **c)** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0;x]$ montrer que
$$\frac{-4}{3} \leqslant \frac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

0,25 pt **d)** Déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé à droite au point 0.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2012

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **7.5 points**
- Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **2.5 points**

Exercice 1 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

partie I :

Pour tous a et b de l'intervalle $I=[1;+\infty[$, on pose : $a\perp b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)^2$

0.5 pt **1 -** Montrer que $\perp$ est une loi de composition interne sur I.

0.5 pt **2 -** Montrer que la loi $\perp$ est commutative et associative.

0.25 pt **3 -** Montrer que $\perp$ admet un élément neutre à déterminer.

partie II :

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire. Soit $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix} x & 2(x-1)\\ 0 & 1\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2 - On considère l'application φ définie par : $\begin{array}{rccc}\varphi & : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & E\\ & & x & \longmapsto & M(x)\end{array}$

0.5 pt **a)** Montrer que l'application φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

0.5 pt **b)** En déduire la structure de $(E,\times)$.

0.75 pt **c)** Montrer que l'ensemble $H=\left\{\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2\\ 0 & 1\end{pmatrix}/n\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(E,\times)$.

Exercice 2 : (3.5 pts) (Les parties I et II sont indépendantes.)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

partie I :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $(E):\ z^2-4(1+\frac{2}{3}i)z+\frac{5}{3}+4i=0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que le nombre $z_1=1+\frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E).

0.25 pt **b)** Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2=3z_1$.

2 - soit θ l'argument du nombre complexe z_1.

0.5 pt Écrire en fonction de θ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3}+4i$.

partie II :

On considère trois points A, B et Ω distincts deux à deux, d'affixes respectifs a, b et ω.

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $P=r(A)$ et $B=r(Q)$ et soient p et q les affixes respectifs de P et Q.

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $p=\omega+e^{\frac{i\pi}{3}}(a-\omega)$ et $q=\omega+e^{\frac{-i\pi}{3}}(b-\omega)$.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\dfrac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1-e^{\frac{-i\pi}{3}}}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

0.5 pt **c)** Montrer que : $\dfrac{p-a}{q-b}=\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

2 - On suppose que : $\left(\dfrac{\omega-a}{\omega-b}\right)=e^{\frac{2i\pi}{3}}$

0.25 pt **a)** Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

0.75 pt **b)** Montrer que $\arg\left(\dfrac{b-a}{p-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ et déduire que le quadrilatère $APQB$ est un rectangle.

Exercice 3 : (3 pts)

0.25 pt **1 -** **a)** Vérifier que 503 est un nombre premier.

0.75 pt **b)** Montrer que : $7^{502} \equiv 1[503]$ puis déduire que $7^{2008} \equiv 1[503]$

0.5 pt **2 -** On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) : 49x - 6y = 1$.
Sachant que $(1,8)$ est une solution particulière de (E), résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

3 - On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{2007}$

0.25 pt **a)** Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation (E).

1 pt **b)** Montrer que : $N \equiv 0[4]$ et $N \equiv 0[503]$.

0.25 pt **c)** Déduire que N est divisible par 2012.

Exercice 4 : (7.5 pts)

partie I :

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$

0.5 pt **1 -** Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

0.5 pt **2 -** Déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

partie II :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$

1 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

0.5 pt **2 -** Montrer que pour tout nombre réel x, On a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$.

0.5 pt **3 -** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

1 pt **4 -** Construire $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f et $(\mathcal{C}')$ la courbe représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(On admet que -0.7 est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$).

0.75 pt **5 -** Montrer que pour tout x de $]-1;0[$, on a : $0 < f'(x) < g(e)$.

0.75 pt **6 -** Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $-1 < \alpha < 0$.

7 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ -1 \leqslant u_n \leq 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant g(e)|u_n - \alpha|$.

0.5 pt **c)** Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ |u_n - \alpha| \leqslant (g(e))^n$.

0.5 pt **d)** Sachant que : $g(e) < 0.6$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}\left(\frac{\ln t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$

0.25 pt **1 -** Calculer $F(1)$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

0.5 pt **b)** Déduire que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ $F(x)=0$.

0.5 pt **3 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$F(x)=\left(\arctan x+\arctan\frac{1}{x}\right)\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$$

0.25 pt **4 -** Montrer que $(\forall x>0);\ \arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arctan x$

0.5 pt **5 -** Déduire que $(\forall x>0);\ \ln x=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{\arctan t}{t}\mathrm{d}t$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2013

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 3 exercices et un problème :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **L'arithmétique** .... **3 points**
— Problème : **L'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau unitaire commutatif et intègre .

1 - On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ x*y=x+y-2$

0,5 pt **a)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative

0,25 pt **b)** Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ admet un élément neutre à déterminer.

0,5 pt **c)** Montrer que $(\mathbb{Z},*)$ est un groupe commutatif.

2 - On munit $\mathbb{Z}$ de la loi de composition interne $\top$ définie par :
$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2\right)\ ;\ x\top y=xy-2x-2y+6$
On considère l'application f de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ définie par : $(\forall x\in\mathbb{Z})\ ;\ f(x)=x+2$

0,5 pt **a)** Montrer que f est un morphisme bijectif de $(\mathbb{Z},\times)$ vers $(\mathbb{Z},\top)$

0,25 pt **b)** Montrer que : $\forall(x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\ ;\ (x*y)\top z=(x\top z)*(y\top z)$

0,75 pt **3 -** En déduire de ce qui précède que $(\mathbb{Z},*,\top)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,25 pt **4 - a)** Montrer que : $x\top y=2$ si et seulement si $x=2$ ou $y=2$

0,25 pt **b)** En déduire que l'anneau $(\mathbb{Z},*,\top)$ est intègre .

0,25 pt **c)** $(\mathbb{Z},*,\top)$ est-il un corps ? (Justifier la réponse)

Exercice 2 : (3.5 pts)

partie I : Soit a un nombre complexe non nul .

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $(E):2z^2-(3+i\sqrt{3})az+(1+i\sqrt{3})a^2=0$

0,25 pt **1 -** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $(-1+i\sqrt{3})^2a^2$

0,5 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

partie II : Le plan complexe est reporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A , B et M d'affixes respectives a , $b=ae^{i\frac{\pi}{3}}$ et z

Soit r la rotation de centre M et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

On pose $A_1=r^{-1}(A)$ et $B_1=r^{-1}(B)$ (où r^{-1} est la rotation réciproque de la rotation r)

soient a_1 et b_1 les affixes respectifs de A_1 et B_1

0,5 pt **1 -** Vérifie que OAB est un triangle équilatéral.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $a_1=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ et $b_1=\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a+\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

0,5 pt **b)** Montrer que OA_1MB_1 est un parallélogramme.

3 - Supposons que : $M\neq A$ et $M\neq B$

0,5 pt **a)** Montrer que : $\dfrac{z-b_1}{z-a_1}=-\dfrac{z-b}{z-a}\times\dfrac{a}{b}$

0,75 pt **b)** Montrer que les points M , A_1 et B_1 sont alignés si et seulement si les points M , O , A et B sont cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

L'objectif de l'exercice est de rechercher les entiers naturels n strictement supérieure à 1 qui vérifient la propriété suivante : $(R) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$

1 - On suppose que n vérifie la propriété (R) et soit p **le plus petit diviseur premier de n**

0,75 pt **a)** Montrer que : $3^n - 2^n \equiv 0[p]$, en déduire que $p \geqslant 5$

0,5 pt **b)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ et $3^{p-1} \equiv 1[p]$

0,5 pt **c)** Montrer qu'il existe un couple (a,b) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $an - b(p-1) = 1$

0,5 pt **d)** Soient r et q respectivement le reste et le quotient de la division euclidienne de a par p-1 $\left(a = q(p-1)+r\right.$ avec : $\left.0 \leqslant r < p-1 \text{ et } q \in \mathbb{Z}\right)$

Montrer qu'il existe **un entier naturel** k tel que : $rn = 1 + k(p-1)$

0,75 pt **2 -** Déduire de ce qui précède qu'il n'existe pas d'entier naturel n strictement supérieur à 1 vérifiant la propriété (R).

Problème : (10 pts)

On considère la fonction numérique h définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$h(1) = 1 \text{ et } (\forall x > 1) \; ; \; h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$$

partie I :

0,25 pt **1 - a)** Montrer que h est continue à droite en 1

0,75 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 1)$; $\ln x < x - 1$ puis déduire que la fonction h strictement décroissante sur $]1;+\infty[$

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ puis dresser le tableau des variations de h

0,25 pt **b)** Déduire que : $(\forall x \geqslant 1)$; $0 < h(x) \leqslant 1$

partie II :

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par :

$$(\forall x > 1) \; ; \; g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t} dt \text{ et } g(1) = \ln 2$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall x > 1)$; $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$

0,25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x > 1)$; $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t}-1}{t \ln t} dt$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\forall x > 1)$; $g(x) - \ln 2 = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{t-1}{t \ln t} dt$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall x > 1)$; $(x - \sqrt{x})h(x) \leqslant g(x) - \ln 2 \leqslant (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$

0,5 pt **b)** Déduire que g est dérivable à droite au point 1

0,75 pt **c)** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0,75 pt **3 - a)** Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et que : $(\forall x > 1)\ ;\ g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$

0,5 pt **b)** Déduire que $(\forall x \geqslant 1)\ ;\ 0 < g'(x) \leqslant \frac{1}{2}$ puis dresser le tableau des variations de g

0,5 pt **c)** Construire la courbe (C)

partie III :

I-

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ est une bijection de l'intervalle $[1;+\infty[$ vers l'intervalle $]-\infty;\ln 2]$

0,25 pt **2 -** Déduire qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1;+\infty[$ tel que $1 + g(\alpha) = \alpha$

II- On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $1 \leqslant u_0 < \alpha$ et $(\forall n \geqslant 0)\ ;\ u_{n+1} = 1 + g(u_n)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 0)\ ;\ 1 \leqslant u_n < \alpha$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante

0,75 pt **c)** Déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et que : $\lim_{x\to+\infty} u_n = \alpha$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 0)\ ;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 0)\ ;\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 pt **c)** Déduire une deuxième fois que : $\lim_{x\to+\infty} u_n = \alpha$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2013

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **8.25 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **1.75 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

les parties A et B sont indépendantes

partie A :

Pour tout x et y de l'intervalle $G =]1;2[$ on pose : $x * y = \dfrac{2(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1)+(x-2)(y-2)}$

0,5 pt **1 -** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G

2 - On rappelle que $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application f de $\mathbb{R}_+^*$ vers G définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

0,75 pt **a)** Montrer que f est un isomorphisme de $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$ dans $(G, *)$

0,5 pt **b)** En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre.

partie B :

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel, et on pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $A^3 = O$ et en déduire que A est un diviseur de zéro dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$

0,5 pt **b)** Vérifier que : $\left(A^2 - A + I\right)(A + I) = I$ en déduire que la matrice $A + I$ admet un inverse dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ que l'on déterminera.

2 - Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = aI + bA$ et l'on considère l'ensemble :

$$E = \left\{ M(a,b) \;/\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

0,75 pt Montrer que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel dont on déterminera une base.

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules noires indiscernables au toucher.

partie A :

On tire au hasard successivement et avec remise quatre boules de l'urne, et on considère la variable aléatoire X égale au nombre de boules noires tirées.

1 pt **1 -** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0,5 pt **2 -** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

partie B :

On réalise l'expérience aléatoire suivante en trois étapes :

Etape 1 : On tire une boule de l'urne, on marque sa couleur et on la remet dans l'urne.

Etape 2 : On ajoute dans l'urne 5 boules de même couleur que la boule tirée à l'étape 1.

Etape 3 : On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne qui contient alors 12 boules après l'étape 2.

On considère les évènements suivants : N "la boule tirée à l'étape 1 est noire"
R "la boule tirée à l'étape 1 est rouge"
E "toutes les boules tirées à l'étape 3 sont noires"

0,5 pt **1 -** Montrer que : $p(E \cap N) = \dfrac{12}{55}$

0,5 pt **2 -** Calculer $p(E)$

0,5 pt **3 -** Calculer la probabilité de l'événement R sachant que E est realisé.

Exercice 3 : (3.5 pts)

partie A :

Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

0,5 pt **1 -** Montrer que : $z_1 = \dfrac{(a-1)}{2}(1+\mathrm{i})$ et $z_2 = \dfrac{(a-1)}{2}(1-\mathrm{i})$ sont les deux solutions de l'équation (E)

2 - On prend : $a = \mathrm{e}^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$

0,5 pt **a)** Montrer que : $a - 1 = 2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$

1 pt **b)** En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2

partie B :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

On admet que $Re(a) < 0$, et on considère les points $A(a)$, $B(-\mathrm{i})$, $C(i)$ et $B'(1)$

0,5 pt **1 -** Déterminer en fonction de a, les affixes des points J et K milieux respectifs de $[AC]$ et $[AB]$

0,5 pt **2 -** Soit r_1 la rotation de centre J et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, et r_2 la rotation de centre K et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

On pose $C' = r_1(C)$ et $A' = r_2(A)$ et soient c' l'affixe de C' et a' l'affixe de A'

Montrer que : $a' = z_1$ et $c' = z_2$

0,5 pt **3 -** Calculer $\dfrac{a'-c'}{a-1}$ et en déduire que la droite (AB') est une hauteur du triangle $A'B'C'$

Exercice 4 : (8.25 pts)

1 - Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2\ln^2(x)}} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

0,5 pt **a)** Montrer que f est continue à droite au point 0, puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **b)** Etudier la dérivabilité de f à droite au point 0

(On pourra utiliser le résultat $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2(x) = 0$)

0,5 pt **c)** Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x > 0)\ ;\ f'(x) = \dfrac{-x\ln(x)(1+\ln(x))}{\left(1+x^2\ln^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}$

0,5 pt **d)** Donner le tableau des variations de la fonction f

2 - Soit F la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

et soit (C_F) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$

0,25 pt **a)** Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur l'intervalle $[e;+\infty[$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall t \geq e)\ ;\ t\ln(t) \leq \sqrt{1+t^2\ln^2(t)} \leq \sqrt{2}t\ln(t)$

0,75 pt **c)** Montrer que : $(\forall x \geq e)\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln(\ln(x)) \leq \displaystyle\int_e^x \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2\ln^2(t)}}\mathrm{d}t \leq \ln(\ln(x))$

0,5 pt **d)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = 0$

0,5 pt **e)** Montrer que (C_F) admet deux points d'inflexions dont on déterminera les abscisses.

1 pt **f)** Construire (C_F) (on prend $F(1) \approx 0,5$ et $F\left(\frac{1}{e}\right) \approx 0,4$)

3 - Pour tout x de $[0;+\infty[$ on pose $\varphi(x) = x - F(x)$

0,75 pt **a)** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$ et étudier les variations de φ

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation $\varphi(x) = n$ admet une seule solution α_n dans l'intervalle $[0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\alpha_n \geq n$ puis calculer : $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

0,5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall n \geq 1)$; $0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0,5 pt **b)** Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$

Exercice 5 : (1.75 pts)

Pour tout entier naturel non nul n on pose : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)}\right)^{n^2}$ et $v_n = \ln(u_n)$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $(\forall n \geq 1)$; $v_n = n^2(\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$

0,5 pt **2 -** En utilisant le théorème des accroissements finies , montrer que :

$(\forall n \geq 1)$ $(\exists c \in]n;n+1[)$; $v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$

0,5 pt **3 -** Montrer que : $(\forall n \geq 1)$; $\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{\left(1+(n+1)^2\right)\arctan(n+1)}$

0,5 pt **4 -** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2014

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **8 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **2 points**

Exercice 1 : (3 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \underbrace{333....3}_{\text{n fois}}1$ (n fois le chiffre 3)

0,5 pt **1 -** Vérifier que les deux nombres a_1 et a_2 sont premiers.

0,5 pt **2 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$.

0,75 pt **3 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$.

0,75 pt **4 -** Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$, puis en déduire que : 31 divise a_{30k+1}.

0,5 pt **5 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$;si $n \equiv 1\ [30]$ alors l'équation $a_n x + 31y = 1$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C};+;\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire de zéro $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout a et b de $\mathbb{R}$ on pose : $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ et on considère l'ensemble $E = \left\{ M(a,b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

0,75 pt **2 -** Calculer $J^2 = J \times J$ sachant que $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis en déduire que E n'est pas stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

3 - On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne $*$ par :$A * B = A \times N \times B$ avec : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui associe à chaque nombre complexe non nul $a + ib$ (a et b étant deux nombres réels) la matrice $M(a,b)$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),*)$.

0,25 pt **b)** On pose :$E^* = E - \{O\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

0,5 pt **c)** Montrer que $(E^*,*)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **4 -** Montrer que :$\left(\forall (A,B,C) \in E^3\right)$ $A*(B+C) = A*B + A*C$.

0,5 pt **5 -** En déduire de ce qui précède que $(E,+,*)$est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
Soit θ un nombre réel tel que : $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : (E) $z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$.

0,25 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = \left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$.

0,75 pt **b)** Écrire sous forme trigonométrique les deux racines z_1 et z_2 de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

2 - On considère les points I , J , T_1 , T_2 et A d'affixes respectives 1 , -1 , $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$, $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\sqrt{2}e^{i\theta}$.

0,5 pt **a)** Montrer que les deux droites (OA) et (T_1T_2) sont perpendiculaires.

0,25 pt **b)** Soit K le milieu du segment $[T_1T_2]$.Montrer que les points O , K et A sont alignés.

0,25 pt **c)** En déduire que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$.

3 - Soit r la rotation de centre T_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,25 pt **a)** Donner l'expression complexe de la rotation r.

0,5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point B image du point I par la rotation r est : $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$.

0,25 pt **c)** Montrer que les deux droites (AB) et (IJ) sont perpendiculaires.

0,25 pt **4 -** Déterminer l'affixe du point C image du point A par la translation de vecteur $(-\vec{v})$.

0,25 pt **5 -** Montrer que A est le milieu du segment $[BC]$.

Exercice 4 : (8 pts)

I)- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

0,25 pt **b)** Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que :$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \quad f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$.

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $(\exists \alpha \in]0,1[)\ f'(\alpha) = 0$.

0,5 pt **d)** En déduire que : $f'\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$.

II) - On considère la fonction F définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall t \in [1, +\infty[)\ \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{t^2}{1+t^2} \leq 1$.

1 pt **b)** Montrer que : $(\forall t \in [1, +\infty[)\ F(1) - \dfrac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \dfrac{1}{4}(\ln x)^2$.

(On remarquera que :$F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} . \frac{\ln t}{t} dt$)

1 pt **c)** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ puis calculer $F'(x)$.

0,25 pt **b)** Étudier les variations de F sur $[0; +\infty[$.

III)-

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall t \in]0, +\infty[)\ -t\ln t \leq \dfrac{1}{e}$

0,25 pt **b)** Montrer que :$(\forall t \in [0, +\infty[)\ f(t) \leq \dfrac{1}{e}$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in]0, +\infty[)\ F(x) < x$

2 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 \in]0; 1[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} = F(u_n)$.

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_n \in]0, 1[$

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,5 pt **c)** Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : (2 pts)

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

0,5 pt **1 -** Montrer que g est continue sur $[0;+\infty[$.

2 - Pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$; on pose : $L(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$

025 pt **a)** Montrer que L est continue sur $[0;+\infty[$

025 pt **b)** Calculer $L(x)$ pour $x > 0$.

0,5 pt **c)** Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} L(x)$ et en déduire la valeur de $L(0)$.

3 - Pour tout entier naturel non nul $n \geq 1$, on pose :$S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

0,5 pt Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2014

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de six exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Probabilité.** .... **2 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique.** .... **1 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.75 points**
— Exercice 4 : **Nombres complexes** .... **3.25 points**
— Exercice 5 : **Analyse** .... **7.5 points**
— Exercice 6 : **Analyse** .... **2.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

1

Exercice 1 : (2 pts)

Considèrons trois urnes U, V et W.

L'urne **W** contient 3 boules indiscernables au toucher : 1 Boule noire et 2 boules blanches. chacune des urnes **U** et **V** contient 4 boules indiscernables au toucher : 2 Boule noires et 2 boules blanches.

On considère l'expérience suivante :

On tire au hasard une boule de l'urne **W** : Si elle est blanche, on la met dans l'urne **U**, puis on tire deux boules simultanément de l'urne **U**, Si elle est noire, on la met dans l'urne **V**, puis on tire deux boules

0.25 pt **1 -** Quelle est la probabilité pour que le tirage des deux boules soit de l'urne U ?

0.75 pt **2 -** Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches à la fin de l'expérience ?

3 - Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches à la fin de l'expérience. Déterminer la loi
1 pt de probabilité de la variable X.

Exercice 2 : (1 pts)

Soit **n** un nombre entier naturel non nul.

Posons $c_n = 2.10^n - 1$ et $b_n = 2.10^n + 1$

0.5 pt **1 -** Montrer que $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$, puis en déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

($\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ représente le plus grand diviseur commun de **a** et **b**)

0.5 pt **2 -** Déterminer un couple $(\mathbf{x_n}, \mathbf{y_n})$ de $\mathbf{Z}^2$ vérifiant : $\mathbf{b_n x_n + c_n y_n = 1}$

Exercice 3 : (3.75 pts)

On pose $\mathbf{J} =]-1, 1[$

Partie I : Soient **a** et **b** deux éléments de l'intervalle **J**, on pose : $\mathbf{a * b = \frac{a+b}{1+ab}}$

0.75 pt **1 -** Vérifier que $\left(\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbf{J}^2\right) ; \mathbf{1 + ab > 0}$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans **J**.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans **J**.

0.25 pt **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans **J** qu'on déterminera.

0.5 pt **c)** Montrer que $(\mathbf{J}, *)$ est un groupe commutatif.

Partie II : On considère l'application **f** définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f(x)} = \frac{e^{\mathbf{x}} - 1}{\mathbf{e^x + 1}}$

0.75 pt **1 -** Montrer que la fonction **f** est une bijection de $\mathbb{R}$ vers **J**.

2 - Soit **g** la bijection réciproque de l'application **f** (la détermination de **g** n'est pas demandé)

0.5 pt Quel que soient **x** et **y** de **J**, on pose : $\mathbf{x \perp y = f(g(x) \times g(y))}$

Montrer que **f** est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*, \times)$ vers $(\mathbf{J}^*, \perp)$ tel que $\mathbf{J}^* = \mathbf{J} - \{0\}$.

3 - On rappelle que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif et on admet que la loi $\perp$ est distributive par rapport
0.5 pt à la loi $*$ dans **J**.

Montrer que $(\mathrm{J}, *, \perp)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (3.25 pts)

Partie I :

0.5 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + \text{ß} = 0$ (a est la solution de l'équation telle que $\text{Re}(\mathbf{a}) > 0$)

0.5 pt **2 - a)** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\mathbf{1} + \mathbf{a}$.

0.25 pt **b)** En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

0.5 pt **c)** Vérifier que $(1+a)(1-a) = 1+i$, en déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $1-a$.

Partie II : Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$, on considère les points $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}$ et M' d'affixes respectifs $\mathbf{a}, -\mathbf{a}, z$ et z' tels que $\mathbf{zz'} + \text{ß} = 0$.

0.25 pt **1 -** Soit $\mathbf{N}$ le point d'affixe $\overline{z}$, conjugué de z.

Montrer que les droites $(\mathbf{ON})$ et (OM') sont perpendiculaires.

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $z' - \mathbf{a} = \text{ß}\frac{z-\mathbf{a}}{\mathbf{az}}$.

0.5 pt **b)** Montrer que si $z \neq -\mathbf{a}$, alors : $z' \neq -\mathbf{a}$ et $\frac{z'-\mathbf{a}}{z'+\mathbf{a}} = -\frac{z-\mathbf{a}}{z+\mathbf{a}}$.

0.5 pt **3 -** On suppose que les points A, B, M ne sont pas alignés.

Montrer que le point $\mathbf{M'}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABM}$.

Exercice 5 : (7.5 pts)

Partie I : Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur l'intervalle $]\mathbf{0}, +\infty[$ par : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{-\ln \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}}}$.
Et $(\mathbf{C_f})$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\text{ß}}; \overrightarrow{\mathbf{j}})$ unité 1 $\mathbf{cm}$.

1 pt **1 -** Calculer $\lim_{x\to 0^+} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\lim_{\mathbf{x}\to+\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x})$, puis interpréter géométriquement les deux résultats obtenus.

0.75 pt **2 -** Calculer $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$, puis en déduire les variations de la fonction $\mathbf{f}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3 - Pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $\mathbf{g_n}$ définie sur $]0, \mathbf{1}[$ par : $\mathbf{g_n}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x^n}$

0.25 pt **a)** Montrer que $\mathbf{g_n}$ est strictement décroissante sur $]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$.

0.5 pt **b)** En déduire que pour tout entier $\mathbf{n} \geq 1$ il existe $\alpha_n \in]0, 1[$ unique, tel que :
$\mathbf{f}(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$.

0.5 pt **c)** Montrer que pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$: $\mathbf{g_n}(\boldsymbol{\alpha_{n+1}}) < 0$.

0.75 pt **d)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, en déduire qu'elle est convergente.

4 - On pose que : $\mathbf{l} = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$

0.25 pt **a)** Vérifier que : $0 < \alpha_1 \leq \mathbf{l} \leq 1$.

0.25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*); \mathbf{h}(\alpha_\mathbf{n}) = \mathbf{n}$ avec $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{-1}{2} + \frac{\ln(-\ln \mathbf{x})}{\ln \mathbf{x}}$.

0.5 pt **c)** Montrer que : $\mathbf{l} = 1$.

0.25 pt **d)** En déduire que $\lim_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = 0$.

Partie II :

0.25 pt **1 - a)** Étudier le signe de l'intégrale $\int_\mathbf{x}^1 \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$ pour tout x de $]\mathbf{0}, +\infty[$

0.5 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$(\forall x > 0); \int_x^1 f(t)dt = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{\mathbf{x}}\ln x$

c) En déduire, en $\mathbf{cm}^2$, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathbf{C_f})$ et les droites d'équations respectives $x = 1, x = e^2$ et $y = 0$ — 0.25 pt

2 - Pour tout entier naturel non nul $\mathbf{n}$, on pose : $\mathbf{U_n} = \frac{1}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{k=n}} \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}\right)$

a) Montrer que pour tout entiers naturels $\mathbf{n}$ et $\mathbf{k}$ tels que : $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$ et $\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{n-1}$, on a : — 0.5 pt

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) Montrer que : $(\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)$; $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$ — 0.5 pt

c) En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{U}_n = 4$ — 0.5 pt

Exercice 6 : (2.5 pts)

On considère la fonction $\mathbf{g}$ définie sur $[0, +\infty[$ par : $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \int_{\sqrt{\mathbf{x}}}^{1} \mathbf{e}^{-\mathbf{t}^2} \mathbf{dt}$.

1 - Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose : $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \int_1^x e^{-t^2} d\mathbf{t}$.

a) Vérifier que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}(\sqrt{\mathbf{x}})$. — 0.25 pt

b) Montrer que la fonction $\mathbf{g}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. — 0.5 pt

c) Calculer $\mathbf{g}'(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} > 0$, puis en déduire que g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ — 0.5 pt

2 - a) Montrer que : $(\forall \mathrm{x} > 0)$; $\frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(0)}{\mathbf{x}} < -\frac{1}{2\sqrt{\mathbf{x}}} \mathbf{e}^{-\mathbf{x}}$ — 0.75 pt

b) En déduire que la fonction g n'est pas dérivable à droite en 0 et donner une interprétation graphique du résultat obtenu. — 0.5 pt

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2015

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Analyse** .... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) : z^2-(5+i\sqrt{3})z+4+4i\sqrt{3}=0$$

0,25 pt **a)** Vérifier que $(3-i\sqrt{3})^2$ est le discriminant de l'équation (E).

0,5 pt **b)** Déterminer a et b les deux solutions de l'équation (E) (sachant que : $b\in\mathbb{R}$)

0.25 pt **c)** Vérifier que : $b=(1-i\sqrt{3})a$

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
Soit A le point d'affixe a et B le point d'affixe b.

0,5 pt **a)** Déterminer b_1 l'affixe du point B_1 image du point O par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **b)** Montrer que B est l'image de B_1 par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $\arg\left(\frac{b}{b-a}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

0,5 pt **d)** Soit C un point, d'affixe c, appartenant au cercle circonscrit au triangle OAB et différent de O et de A. Déterminer un argument du nombre complexe $\frac{c}{c-a}$

Exercice 2 : (3 pts)

Soit x un nombre entier relatif tel que : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

0,25 pt **1 -** Sachant que : $1436\times1051-2015\times749=1$, montrer que 1436 et 2015 sont premiers entre eux.

2 - Soit d un diviseur commun de x et de 2015

0,5 pt **a)** Montrer que d divise 1436.

0,5 pt **b)** Déduire que x et 2015 sont premiers entre eux.

0,75 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que :
$x^{1440}\equiv1[5]$ et $x^{1440}\equiv1[13]$ et $x^{1440}\equiv1[31]$ (remarquer que : $2015=5\times13\times31$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $x^{1440}\equiv1[65]$ puis déduire que : $x^{1440}\equiv1[2015]$.

0,5 pt **4 -** Montrer que : $x\equiv1051[2015]$.

Exercice 3 : (4pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont l'unité $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif. Pour tout réel x, on pose $M(x)=\begin{pmatrix}1-x&x\\-2x&1+2x\end{pmatrix}$
et on considère l'ensemble $E=\{M(x)/x\in\mathbb{R}\}$.
On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\quad M(x)TM(y)=M(x+y+1)$$

1 - Soit j l'application de $\mathbb{R}$ dans E définie par : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad j(x)=M(x-1)$

0,5 pt **a)** Montrer que j est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T).

0,5 pt **b)** Montrer que (E,T) est un groupe commutatif.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right) \quad M(x)\times M(y)=M(x+y+\text{xy})$.

0,5 pt **b)** En déduire que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ et que la loi " $\times$ " est commutative dans E.

0,5 pt **c)** Montrer que la loi " $\times$ " est distributive par rapport à la loi " T " dans E.

0,5 pt **d)** Vérifier que $M(-1)$ est l'élément neutre dans (E,T) et que I est l'élément neutre dans $(E,\times)$.

0,25 pt **3 - a)** Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}) \quad M(x)\times M\left(\dfrac{-x}{1+x}\right)=I$.

0,75 pt **b)** Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (6.5pts)

Partie I : Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \ \ et \quad f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right) \text{ pour } x>0$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0,5 pt **c)** Calculer $f'(x)$ pour $x>0$, en déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I d'abscisse e^{-1}.

0,25 pt **b)** Étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite d'équation : $y=x$.

0,5 pt **c)** Tracer la courbe (C). (On prendra $e^{-1}\approx 0,4$).

Partie II : On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant0}$ définie par :

$$u_0=e^{-1} \quad et \quad (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f(u_n)$$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $e^{-1}\leqslant u_n<1$.

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant0}$ est strictement croissante, puis déduire qu'elle est convergente.

3 - On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

0,25 pt **a)** Montrer que $e^{-1}\leqslant l\leqslant 1$

0,5 pt **b)** Déterminer la valeur de l.

Partie III : Soit la fonction numérique F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$F(x)=\int_1^x f(t)\mathsf{d}\mathsf{t}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H: x\mapsto -\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x^2\ln x$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto x\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad \displaystyle\int_1^x t\ln^2(t)dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x>0) \quad F(x)=-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}\ln(x)+\dfrac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la fonction F est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ puis déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 5 : (3.5 pts)

On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$g(0)=\ln 2 \quad \text{et} \quad g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{pour} \quad x>0$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad (\forall t\in[x,2x]) \quad e^{-2x}\leqslant e^{-t}\leqslant e^{-x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad e^{-2x}\ln 2\leqslant g(x)\leqslant e^{-x}\ln 2$. .

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction g est continue à droite en 0 .

0,75 pt **2 -** Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$. .

0,5 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall t>0) \quad -1\leqslant\dfrac{e^{-t}-1}{t}\leqslant e^{-t}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis)

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0) \quad -1\leqslant\dfrac{g(x)-\ln 2}{x}\leqslant\dfrac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$..

0,5 pt **c)** En déduire que la fonction g est dérivable à droite en 0 .

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2015

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **4 points**
— Exercice 2 : **Arithmétique et Probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Analyse** .... **6 points**
— Exercice 5 : **Analyse** .... **4 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (4 pts)

Partie I : On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par la loi de composition interne * définie par :
$\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right); \quad x^*y = x+y-e^{xy}+1$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre qu'on déterminera.

0.5 pt **2 -** Sachant que l'équation : $(E)\ :\ 3+x-e^{2x}=0$ admet deux solutions distincts a et b dans $\mathbb{R}$, Montrer que la loi $*$ n'est pas associative.

Partie II : On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(\mathbf{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$

On considère l'ensemble $F = \left\{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

0.5 pt **2 -** Montrer que $\mathbf{F}$ est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3 - Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbf{F}$ définie par : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right); \quad \varphi(x+\mathbf{iy}) = M(x,y)$

0.5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathbf{F},\times)$

0.25 pt **b)** On pose $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} - \{M(0,0)\}$. Montrer que : $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$

0.25 pt **c)** En déduire que $(\mathbf{F}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 pt **4 -** Montrer que $(\mathbf{F},+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Partie I : Soit a un élément de $\mathbf{Z}$.

0.5 pt **1 -** Montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors : $a^{2016} \equiv 1[13]$.

2 - On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E)\ :\ x^{2015} \equiv 2[13]$ et x une solution de (E).

0.5 pt **a)** Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x \equiv 7[13]$

0.5 pt **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{7+13k/k \in \mathbb{Z}\}$

Partie II : Considérons une urne U contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50 indiscernables au toucher.

0.5 pt **1 -** On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un nombre solution de l'équation (E).

0.5 pt **2 -** On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un nombre solution de l'équation(E) ?

Exercice 3 : (3 pts)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $(\mathbf{E}) : \mathrm{z}^2-(\mathbf{1}+i)\mathrm{z}+\mathbf{2}+\mathbf{2}i=\mathbf{0}$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $\Delta=(\mathbf{1}-\mathbf{3i})^2$ est le discriminant de l'équation (E)

0.5 pt **b)** Déterminer $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ (on prendra $\mathbf{z}_1$ l'imaginaire pur)

0.5 pt **c)** Montrer que $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

2 - Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(\mathbf{O},\overrightarrow{\mathbf{u}},\overrightarrow{\mathbf{v}})$

On considère les points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ d'affixes respectifs $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$.

0.25 pt **a)** Déterminer le nombre complexe e l'affixe du point $\mathbf{E}$, milieu du segment $[\mathbf{AB}]$.

b) Soit $\mathbf{R}$ la rotation de centre $\mathbf{A}$ d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et c l'affixe de point C tel que $\mathbf{R}(\mathbf{E})=\mathbf{C}$.

0.5 pt Montrer que : $\mathbf{z}_{\mathrm{C}}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}i$.

1 pt **c)** Soit $\mathbf{D}$ le point d'affixe $\mathbf{d}=\mathbf{1}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}i$. Montrer que le nombre $\left(\frac{\mathbf{z}_2-\mathbf{d}}{\mathbf{c}-\mathbf{d}}\right)\times\left(\frac{\mathbf{c}-\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2-\mathbf{z}_1}\right)$ est réel , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\frac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$.

Et (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$.

0.75 pt **1 - a)** Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ puis interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0.75 pt **b)** Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.25 pt **c)** Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que le point $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathbb{C}_n)$.

0.5 pt **b)** Construire la courbe (C_1) ,

0.75 pt **c)** Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_1) et les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x)=x$ admet une solution unique $u_n\in]0,n[$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}); f_{n+1}(x)<f_n(x)$

0.75 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, en déduire qu'elle est convergente .

0.5 pt **d)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 5 : (4 pts)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t$.

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction g est paire.

0.75 pt **2 -** Montrer que la fonction $g$est dérivable sur $]0,+\infty[$. puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.5 pt **3 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que ; pour tout $x > 0$:

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt = \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

0.75 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, On a : $|g(x)| \leq \frac{2}{x}$ puis déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0); 0 \leq \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{\mathbf{t}} \mathbf{dt} \leq \mathbf{2x}$

(Remarquer que : $(\forall \mathbf{t} > 0)$; $1 - \cos \mathbf{t} \leq \mathbf{t}$)

0.5 pt **b)** Vérifier que $(\forall x > 0); g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$

0.5 pt **c)** En déduire que : $\lim_{x \to 0^+} \mathbf{g}(x)$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2016

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **7 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **3 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$ on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(x,y)\,;(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_3(\mathbb{R}),+)$

0,5 pt **2 -** Vérifier : $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2\right):M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$

3 - On pose : $E^*=E-\left\{M(0,0)\right\}$ et on considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\mapsto E$ qui au nombre complexe $z=x+iy$ associe la matrice $M(x,y)$ de E, avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

0,25 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(C^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0,75 pt **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre $M(1,0)$

0,5 pt **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

5 - On pose : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

0,5 pt **a)** Calculer $A\times M(x,y)$ pour $M(x,y)\in E$

0,5 pt **b)** En déduire qu'aucun élément de E n'admet pas de symétrique dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

Exercice 2 : (3 pts)

partie A :

Soit (a,b) dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que le nombre **premier** 173 divise a^3+b^3

0,25 pt **1 -** Montrer que $a^{171}\equiv -b^{171}\ [173]$ (remarquer que : $171=3\times 57$)

0,25 pt **2 -** Montrer que : 173 **divise** a si et seulement si 173 **divise** b

0,25 pt **3 -** On suppose que 173 **divise** a. Montrer que 173 **divise** $a+b$

4 - On suppose que 173 **ne divise pas** a

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de **FERMAT**, montrer que : $a^{172}\equiv b^{172}\ [173]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $a^{171}(a+b)\equiv 0\ [173]$

0,5 pt **c)** En déduire que 173 **divise** $a+b$

partie B :

On considère dans $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ l'équation suivante : $(E)\ x^3+y^3=173(xy+1)$

Soit (x,y) un élément de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ solution de (E), on pose $x+y=173k$ avec $k\in\mathbb{N}^*$

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$

0,5 pt **2 -** Montrer que : $k=1$, puis résoudre l'équation (E).

Exercice 3 : (3.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère dans le plan complexe deux points M_1 et M_2 tels que les points O, M_1 et M_2 sont distincts deux à deux et non alignés.

Soient z_1 et z_2 les affixes respectives des points M_1 et M_2 et soit M le point dont l'affixe z vérifie la relation : $z = \dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $\dfrac{z_1-z}{z_2-z} \times \dfrac{z_2}{z_1} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que le point M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2

0,5 pt **2 -** Montrer que si $z_2 = \overline{z_1}$ alors M appartient à l'axe des réels.

3 - On suppose que M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et de mesure d'angle α où α est un réel de l'intervalle $]0;\pi[$

0,5 pt **a)** Calculer z_2 en fonction de z_1 et de α

0,5 pt **b)** Montrer que le point M appartient à la médiatrice du segment $[M_1M_2]$

4 - Soit θ un réel donné de l'intervalle $]0;\pi[$

On suppose que z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation : $6t^2-(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1)\,t+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1)=0$

0,5 pt **a)** Sans calculer z_1 et z_2 vérifier que : $z = 2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$

0,5 pt **b)** Donner en fonction de θ, la forme trigonométrique du nombre complexe z.

Exercice 4 : (7 pts)

partie A :

0,5 pt **1 -** En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, montrer que pour tout réel strictement positif x, il existe un réel θ compris entre 0 et x tel que : $\mathrm{e}^{\theta} = \dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}$

2 - En déduire que :

0,25 pt **a)** $(\forall x>0)$; $1-x<\mathrm{e}^{-x}$

0,25 pt **b)** $(\forall x>0)$; $x+1<\mathrm{e}^{x}$

0,25 pt **c)** $(\forall x>0)$; $0<\ln\left(\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\right)<x$

partie B :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$ si $x>0$ et $f(0)=1$

Et soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x\geq 0)$; $x-\dfrac{x^2}{2}\leq -\mathrm{e}^{-x}+1$

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-a) de la première partie)

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x\geq 0)$; $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leq \mathrm{e}^{-x}+x-1\leq\dfrac{x^2}{2}$

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que : $(\forall x>0)$; $\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+x-1}{x^2}f(x)$

0,75 pt **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1}{2}$ puis interpréter le résultat obtenu.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que f est dérivable en tout point de $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\frac{\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1-x\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^2}$$

0,5 pt **b)** En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-b) de la première partie)

partie C :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0>0$ et $u_{n+1}=\ln\left(f\left(u_n\right)\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n>0$

0,5 pt **2 -** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2-c) de la première partie)

0,5 pt **3 -** Montrer que 0 est l'unique solution de l'équation : $\ln\left(f\left(u_n\right)\right)=x$ puis déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

Exercice 5 : (3 pts)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $I=]0;+\infty[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{t}-1}}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Etudier le signe de $F(x)$ pour tout x de I

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I et calculer $F'(x)$ pour tout x de I.

0,25 pt **c)** Montrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle I

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la technique de changement de variable en posant : $u=\sqrt{\mathrm{e}^{t}-1}$, montrer que pour tout x de I on a : $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{x}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{t}-1}}\mathrm{d}t=2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}\right)-\frac{\pi}{2}$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que la fonction F est une bijection de l'intervalle I dans un intervalle J que l'on déterminera.

0,5 pt **b)** Déterminer F^{-1} la bijection réciproque de F.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2016

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 2 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **6.5 points**
— Exercice 5 : **Problème d'analyse** .... **3.5 points**

Exercice 1 : (3 pts)

On a deux boites U et V. La boite U contient 4 boules rouges et 4 boules bleues. La boite V contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite U : Si elle est rouge, on la remet dans la boite V puis on tire au hasard une boule de la boite V, si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite V.

Soient les événements suivants : R_U « La boule tirée de la boite U est rouge »
B_U « La boule tirée de la boite U est bleue »
R_V « La boule tirée de la boite V est rouge »
B_V « La boule tirée de la boite V est bleue »

0,5 pt **1 -** Calculer la probabilité de chacun des deux événements R_U et B_U.

0,5 pt **2 - a)** Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement R_U est réalisé.

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement B_V sachant que l'événement B_U est réalisé.

1 pt **3 -** Montrer que la probabilité de l'événement B_V est : $\dfrac{13}{21}$

0.5 pt **4 -** En déduire la probabilité de l'événement R_V.

Exercice 2 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe $z=x+\mathrm{i}y$ où $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on pose : $M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble $E=\{M(z)\,/\,z\in\mathbb{C}\}$

1 - On munit E de la loi de composition interne $*$ définie par :
$(\forall z\in\mathbb{C})\ (\forall z'\in\mathbb{C}) \quad : \quad M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$
1 pt Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

2 - On considère l'application $\varphi:\mathbb{C}^*\mapsto E$ qui associe au nombre complexe z de $\mathbb{C}^*$ la matrice $M(z)$ de E

1 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(C^*,\times)$ dans $(E,\times)$

0,5 pt **b)** En déduire que $(E-\{M(0)\},\times)$ est un groupe commutatif.

1 pt **3 -** Montrer que $(E,*,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ z^2-\left(1+\sqrt{3}\right)(1+\mathrm{i})\,z+4\mathrm{i}=0$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta=\left[\left(\sqrt{3}-1\right)(1-\mathrm{i})\right]^2$

1 pt **b)** Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de (E)

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les deux points A et B d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{3} + i$

0,75 pt **a)** Montrer que l'ensemble (D) des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$ est une droite qui passe par le point B

0,5 pt **b)** Soient M et M' deux points d'affixes respectives z et z' tels que : $z' = a\bar{z} - b$ et $z \neq b$ Montrer que : $\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)} = \frac{2}{|z-b|^2}$

0,75 pt **c)** En déduire que la droite (D) est une bissectrice de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}}\right)$

Exercice 4 : (6.5 pts)

n est un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$
et soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,75 pt **1 - a)** Etudier les deux branches infinies de la courbe (C_n).

0,75 pt **b)** Etudier les variations de la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ puis donner son tableau de variation.

0,5 pt **c)** Construire (C_2)

0,5 pt **2 -** Montrer que la fonction f_n est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel α_n de l'intervalle $]0;+\infty[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

0,5 pt **b)** Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\ln(x) < x$

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$

5 - Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\mathrm{d}x$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $(\exists c_n \in [\alpha_n; \alpha_{n+1}])$: $I_n = f_n(c_n)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$

0,5 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 5 : (3.5 pts)

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère la fonction numérique g_n à variable réelle x définie sur l'intervalle $[n;+\infty[$ par :
$\int_n^x \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction g_n est dérivable sur l'intervalle $[n;+\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première g_n'

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement croissante sur l'intervalle $[n;+\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \geq n)$; $g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(On pourra utiliser l'inégalité :$(\forall t \geq 0)$; $\ln(1+t) \leq t$)

0,25 pt **b)** En déduire que $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que g_n est une bijection de l'intervalle $[n;+\infty[$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \geq 2)$ $(\exists!\ u_n \geq n)$: $\int_n^{u_n} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = 1$

4 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie dans la question 3-b).

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $\int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2017

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire dont le zéro est la matrice nulle
$\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et dont l'unité est la matrice $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ et pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{M(a,b)}\ =\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$

On considère l'ensemble : $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que E est un sous groupe de $(M_3(\mathbb{R}),+)$

2 - On définit sur $M_3(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$\left(\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right)\qquad M(a,b)TM(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

0,5 pt Vérifier que E est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}),T)$.

3 - On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E qui à tout nombre complexe non nul $a+ib$ (où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$) faite correspondre la matrice $M(a,b)$ de E.

0,75 pt **a)** Vérifier que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$ où $E^*=E-M(0,0)$.

0,75 pt **b)** On déduire que (E^*,T) est un groupe commutatif dont on déterminera l'élément neutre J.

0,5 pt **4 -** Montrer que la loi T est distributive par rapport a la loi $+$ dans E.

0,5 pt **5 -** On déduire que $(E,+,T)$ est un corps commutatif .

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un complexe **non nul**.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, $\quad (E):\quad 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que le discriminant l'équation de (E) est : $\Delta=(2im)^2$.

0,5 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$
On suppose que $m\in\mathbb{C}-\{0,1,i\}$ et on pose : $z_1=\dfrac{1+i}{2}(m+1)$ et $z_2=\dfrac{1-i}{2}(m+i)$
On considère les points : A , B , M , M_1 et M_2 d'affixes respectives 1, i, m, z_1 et z_2.

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $z_1=iz_2+1$

0,5 pt **b)** Montrer que M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre Ω d'affixe $\omega=\dfrac{1+i}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\dfrac{z_2-m}{z_1-m}=i\dfrac{m-1}{m-i}$.

0,5 pt **b)** Montrer que si les points M , M_1 et M_2 sont alignés , alors le point M appartient au cercle (Γ) dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'ensemble des points M tels que les points Ω , M , M_1 et M_2 sont cocycliques. (remarquer que : $\dfrac{z_1-\omega}{z_2-\omega}=i$)

Exercice 3 : (3 pts)

On admet que le nombre 2017 est premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$
Soit p **un nombre premier supérieur ou égale à** 5

1 - Soit le couple $(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

0,25 pt **a)** Vérifier que : $p < 2017$.

0,5 pt **b)** Montrer que p ne divise pas y

0,75 pt **c)** Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$ puis en déduire que p divise 2016

0,5 pt **d)** Montrer que : $p = 7$

1 pt **2 -** Déterminer ,suivant les valeurs de p, les couples (x,y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$.

Exercice 4 : (10 pts)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \qquad et \quad (\forall x \in]0;+\infty[); \quad f(x) = (1+\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
(on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$)

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue à droite au point 0

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction f est dérivable à droite au point 0

0,5 pt **c)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x dans l'intervalle $]0;+\infty[$

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variation de la fonction f

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion I qu'on déterminera .

0,5 pt **b)** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ (On prend $f(1) \simeq 0,7$ et $4e^{-3} \simeq 0,2$).

Deuxième partie :

Soit la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,25 pt **1 -** Montrer que la fonction F est continue sur $[0;+\infty[$.

0,5 pt **2 - a)** En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$$

.

0,25 pt **b)** Déterminer : $\displaystyle\int_x^1 (1+\frac{1}{t})e^{-\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = e^{-1}$.

0,5 pt **3 - a)** Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives , $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$

4 - Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définit par : $u_n = F(n) - F(n+2)$.

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème des accroissements finis , montrer que pour tout entier naturel n il existe un nombre réel v_n appartenant à l'intervalle $]n;n+2[$ tel que :

$$u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{-\dfrac{1}{v_n}}$$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\dfrac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\dfrac{1}{n+2}}$

0,25 pt **c)** Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

<u>Troisième partie :</u>

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout entier naturel non nul n , il existe un nombre réel strictement positif unique a_n tel que : $f(a_n) = e^{-\dfrac{1}{n}}$.

0,25 pt **b)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

0,25 pt **c)** Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $-\frac{1}{a_n} + ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall t \in [0;+\infty[)$; $1-t \leqslant \frac{1}{1+t} \leqslant 1-t+t^2$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in [0;+\infty[)$; $-\frac{x^2}{2} \leqslant -x + ln(1+x) \leqslant -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

3 - Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 4.

0,5 pt **a)** Vérifier que : $a_4 \geqslant 1$, en déduire que : $a_n \geqslant 1$ (On admet que $e^{\frac{3}{4}} \geqslant 2$).

0,5 pt **b)** Montrer que : $1 - \frac{2}{3a_n} \leqslant \frac{2a_n^2}{n} \leqslant 1$ (On pourra utiliser les questions $1-c$ et $2-b$ de la partie 3).

0,5 pt **c)** Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leqslant a_n$ (On pourra utiliser les questions $3-a$ et $3-b$ de la partie 3).

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

0,5 pt **d)** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2017

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **4.5 points**
— Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **2.5 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre .

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $E = \{M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

0.75 pt **1 -** Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ de dimension 2.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.75 pt **b)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

3 - On pose $E^* = E \setminus \{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$

0.75 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **b)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 pt **c)** Montrer que $J^{2017} = \varphi\left(3^{1008}\ \mathrm{i}\sqrt{3}\right)$, puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*,\times)$.

0.5 pt **4 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient $2n$ boules ($n \in \mathbb{N}^*$), dont n sont blanches et n sont noires.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boulle et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points.
- Si les deux boules tirées sont noires,on perd 20 points.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul.

0.75 pt **1 -** Calculer la probabilité de gagner 20 points, la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2 - On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 pt **a)** Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 pt **b)** Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3 - Au cours d'un jeu , on considère la variable X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd, 0 si le gain est nul et $+20$ si on gagne.

0.5 pt **a)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire$X$.

0.25 pt **b)** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 3 : (2.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z et M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

0.5 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.

2 - On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1.

0.5 pt Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

3 - Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$.

0.75 pt Montrer que : si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ).

4 - Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$.

0.75 pt Montrer que si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB)

Exercice 4 : (10 pts)

Partie A :

Soit f la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & ; x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 1 \end{cases}$

0.5 pt **1 -** Montrer que f est continue sur l'intervalle I.

0.5 pt **2 - a)** Soit x dans I. Montrer que $\forall t \in [0; x]$; $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in I)$; $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

0.75 pt **c)** Montrer que f est dérivable à droite en 0.

0.5 pt **3 - a)** Sachant que f est dérivable sur $]0; +\infty[$, Calculer $f^{'}(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$.

0.25 pt **b)** Étudier les variations de f sur I.

Partie B :

Soit g la fonction numérique définie sur $I = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t; & x \in]0; +\infty[\\ g(0) = 1 \end{cases}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[)$; $f(x) \leq g(x) \leq 1$.

0.75 pt **b)** Montrer que g est dérivable à droite en 0.

2 - Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[; \quad g^{'}(x) = \frac{1}{x}\left(f(x) - g(x)\right)$$

0.75 pt

0.25 pt **3 -** Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I.

4 - a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0$

0.75 pt (Remarque que : $\forall x \in]0; +\infty[; \quad 0 < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$)

0.5 pt **b)** Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

Partie C :

0.75 pt **1 -** Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0; 1[$.

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad 0 \leq 1-f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b) partie A)

0.75 pt **b)** Montrer que : $\forall x \in]0;+\infty[\,; \quad \left|g'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$

3 - Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$; pour tout n dans $\mathbb{N}$

0.75 pt **a)** Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})\,; \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2018

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3,5 points**
- Exercice 2 : **Arithmétiques** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3,5 points**
- Exercice 4 : **étude de fonctions et suites numériques** .... **7,5 points**
- Exercice 5 : **fonction définie par intégrale** .... **2,5 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel.

Pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-2y\\y&x+2y\end{pmatrix}$

et on considère l'ensemble : $E=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

0,25 pt **1 -** Montrer que E est un sous groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$.

0,5 pt **b)** On pose $\mathrm{J}=M(0,1)$. Montrer que (I,J) est une base de l'espace vectoriel $(E,+,.)$.

0,5 pt

0,5 pt **3 - a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est une anneau commutatif.

4 - soit φ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $M_2(\mathbb{R})$ par :

$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\ );\ \varphi(x+\mathrm{i}y)=M(x+y,-y)=\begin{pmatrix}x+y&2y\\-y&x-y\end{pmatrix}$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** On pose $E^*=E-\left\{\mathrm{O}\right\}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$.

0,25 pt **c)** En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0,25 pt **5 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

0.5pt **1 -** Montrer que pour tout entier relatif x , si $x^2\equiv1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv1[p]$.

2 - Soit x un entier relatif vérifiant $x^{p-5}\equiv1[p]$.

0,5 pt **a)** Montrer que x et p sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x^{p-1}\equiv1\ [p]$

0.5 pt **c)** Vérifier que $2+(k-1)(p-1)=k(p-5)$.

0,5 pt **d)** En déduire que : $x^2\equiv1\ [p]$

0.5 pt **3 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^{62}\equiv[67]$.

Exercice 3 : (3.5 pts)

Soit m un nombre complexe .

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation , $(E_m):z^2+(\mathrm{i}m+2)z+\mathrm{i}m+2-m=0$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta=(\mathrm{i}m-2\mathrm{i})^2$.

0,5 pt **b)** Donner suivant les valeurs de m l'ensemble des solutions de (E_m).

0,5 pt **2 -** Pour $m=\mathrm{i}\sqrt{2}$, écrire les deux solutions de (E_m) sous la forme exponentielle .

II - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)$

On considère les points : A , Ω, M, et M' d'affixes respectifs $a=-1-\mathrm{i}$, $\omega=\mathrm{i}$, m et $m'=-\mathrm{i}m-1+\mathrm{i}$.

1 - Soit R la rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$ et qui transforme M en M'.

0.25 pt **a)** Vérifier que Ω est le centre de la rotation R.

0,5 pt **b)** Déterminer l'affixe b du point B tel que $A = R(B)$

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$.

0,5 pt **b)** En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si les points A, B ,Ω et M sont cocycliques.

0,5 pt **c)** Montrer que l'ensemble des points M tel que les points A, M et M' soient alignés est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 4 : (7.5 pts)

Partie I :

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = x - \ln(1+x)$

0,5 pt **b)** En utilisant le changement de variable $u = t^2$; montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \; ; \int_0^x \frac{t}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

0,5 pt **c)** En déduire que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$.

0,25 pt **d)** Déterminer $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1) \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,25 pt **1 - a)** montrer que f est continue à droite en 0.

0,5 pt **b)** montrer que f est dérivable à droite en 0. (on pourra utiliser le résulta de la question I.2).

0,75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **2 - a)** Monter que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis vérifier que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \; : \; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

.

0,25 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

0,25 pt **c)** Vérifier que $f([0;+\infty[) = [1;+\infty[$.

0,5 pt **3 -** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$. (on construira le demi tangente à droite au point d'abscisse 0)

Partie III :

1 - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = f(x) - x$.

0,5 pt **a)** Monter que $(\forall x \in]0;+\infty[) \; : \; 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

0,5 pt **b)** En déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et que $g(]0;+\infty[)=]-\infty;1[$.

0,25 pt **c)** Monter que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in]0;+\infty[$.

2 - soit a un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0=a$ et $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_{n+1}=f(u_n)$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n>0$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que :$(\forall n\in\mathbb{N})\quad |u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|a-\alpha|$.

0,25 pt **d)** En déduire que le suite (u_n) converge vers α.

Exercice 5 : (2.5 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :$F(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 -** Montrer que F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que $(\forall x\in]0;+\infty[):\ F(x)\geq x$. puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que F est impaire, puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

0,5 pt **c)** Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

0,5 pt **d)** Montrer que la bijection réciproque G de la fonction F est dérivable en 0, puis calculer $G'(0)$.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2018

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... $3,5$ **points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... $3,5$ **points**
— Exercice 3 : **Calcul des probabilités** .... 3 **points**
— Exercice 4 : **Analyse** .... 11 **points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3,5 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 4 . Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M(x,y)} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & \mathrm{y} \\ 0 & \mathrm{x} \end{pmatrix}$ On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe du groupe $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que E est un sous-espace de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\ .)$

0.25 pt **b)** Montrer que l'espace vectoriel réel $(E,+,.)$ est de dimension 2

0.25 pt **3 - a)** Montrer que E est une partie stable pour la loi $\times$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

4 - On définit dans $M_2(\mathbb{R})$ la loi de composition interne T par :

$$(\forall M(x,y) \in M_2(\mathbb{R}))\left(\forall M\left(x',y'\right) \in M_2(\mathbb{R})\right)$$
$$M(x,y) T M\left(x',y'\right) = M(x,y) \times M\left(x',y'\right) - M(y,0) \times M\left(y',0\right)$$

Soit φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par : $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{C}^* & \mapsto & E \\ x+iy & \mapsto & M(x,y) \end{array}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable pour la loi T

0.25 pt **b)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers (E,T)

0.25 pt **c)** On pose : $\mathrm{E}^* = E - \{\theta\}$. Montrer que (E^*,T) est un groupe commutatif.

0.5 pt **5 - a)** Montrer que la loi T est distributive par rapport à la loi $+$ dans E

0.25 pt **b)** Montrer que $(E,+,T)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3,5 pts)

1 - Pour tout nombre complexe $Z \in \mathbb{C} - \{i\}$ on pose : $h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$.

0.5 pt **a)** Vérifier que : $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 - 2\mathrm{iz} - 2 = 0$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : z^2 - 2iz - 2 = 0$

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$

On note a et b les deux solutions de l'équation (E) tel que : $\mathrm{Re}(a) = 1$

Et pour tout $Z \in \mathbb{C} - \{i,a,b\}$ On considère les points $M(z), M'(h(z)), A(a)$ et $B(b)$

0.75 pt **a)** Montrer que : $\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

0.75 pt **b)** En déduire que : $\left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})[2\pi]$.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que si M et A et B sont alignés alors M, A, B et M' sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que si M, A et B ne sont pas alignés alors M, A, B et M' sont cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
On désigne par X la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de la face "pile". (c'est-à-dire le nombre de fois d'apparition de la face "pile" divisé par 10)

1 pt **1 - a)** Déterminer les valeurs prise par X

1 pt **b)** Déterminer la probabilité de l'événement $\left[X = \frac{1}{2}\right]$.

1 pt **2 -** Quelle est la probabilité de l'évènement : X supérieur ou égale à $\frac{9}{10}$

Exercice 4 : Problème (11 pts)

Soit f la fonction numérique de finie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; J)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0.
(On pourra remarquer que : $f(x) = \left(4x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$

0.75 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 pt **2 - a)** Étudier la dérivabilité de f a droite en 0 , puis interpréter graphiquement le résultat obtenus.

0.75 pt **b)** Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

1 pt **c)** Étudier les variations de f sur $[0, +\infty[$, en déduire que :
$(\forall x \in [0,1]); 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$

0.5 pt **d)** Tracer la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$
(On prendra pour unité $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm)

3 - Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5 pt **a)** Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **b)** Calculer $F'(x)$ pour $x \geq 0$, en déduire le sens de variation de F sur l' intervalle $[0, +\infty[$.

0.75 pt **4 - a)** En utilisant la méthode d' intégration par parties, calculer $\int_a^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$ pour tout $x > 0$.

0.75 pt **b)** Montrer que pour tout $x > 0$

$$F(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$$

1 pt **c)** En déduire en m^2, l'aire du domaine limite par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ et $y = 0$.

5 - Pour out entier naturel n non nul, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$.

1 pt **a)** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée et strictement monotone.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2019

MATHÉMATIQUES

⋆ROYAUME DU MAROC ⋆

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\left(\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\right)\ ;\ (x+yi)*(a+bi)=xa+(x^2b+a^2y)i$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera .

0,25 pt **d)** Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$. Montrer que le nombre complexe $x+yi$ admet le nombre complexe $\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{x^4}i$ comme symétrique pour la loi $*$.

2 - On considère le sous-ensemble E de $\mathbb{C}$ défini par : $E=\left\{x+yi/x\in\mathbb{R}_+^*\,;\,y\in\mathbb{R}\right\}$

0,25 pt **a)** Montrer que E est stable pour la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **3 -** On considère le sous-ensemble G de E défini par : $G=\{1+yi/y\in\mathbb{R}\}$

Montrer que G est un sous-groupe de $(E,*)$.

4 - On considère l'ensemble $F=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\right\}$

0,25 pt **a)** Montrer que F est stable pour la loi $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$.

0,5 pt **b)** On considère l'application $\varphi\ :\ \begin{array}{rcl}E&\longrightarrow&F\\x+yi&\longmapsto&M(x^2,y)\end{array}$

Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$

0,25 pt **c)** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m un nombre complexe non réel $(m\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$

I - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation, d'inconnue z définie par :

$$(E):z^2-(1+i)(1+m)z+2im=0$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2, les deux solutions de l'équation (E)

2 - On suppose dans cette question que $m=e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

0,5 pt **a)** Déterminer le module est un argument de z_1+z_2.

0,25 pt **b)** Montrer que si $z_1z_2\in\mathbb{R}$ alors $z_1+z_2=2i$

II - Le plan complexe rapporté un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$,

On considère les points suivants :

A, B et C d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = (1+i)m$ et $c = 1-i$

D l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et Ω le milieu du segment $[CD]$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que l'affixe de Ω est $\omega = \dfrac{(1-i)(1-m)}{2}$.

0,25 pt **b)** Calculer $\dfrac{b-a}{\omega}$.

0,5 pt **c)** En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB = 2O\Omega$.

2 - La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h

0,5 pt **a)** Montrer que $\dfrac{h-a}{b-a}$ est réel et que $\dfrac{h}{b-a}$ est imaginaire pur.

0,25 pt **b)** En déduire h en fonction de m.

Exercice 3 : (3 points)

On admet que 2969 (l'année amazighe actuelle) est un nombre premier.

Soient n et m deux entiers naturels vérifiant : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969]$

1 - On suppose dans cette question que 2969 que ne divise pas n.

0,5 pt **a)** En utilisant le théorème de Bezout, montrer que : $(\exists u \in \mathbb{Z})\ : u \times n \equiv\ 1\ [2969]$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(u \times m)^8 \equiv -1\ [2969]$ et que $(u \times m)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

(On remarque que : $2968 = 8 \times 371$)

0,5 pt **c)** Montrer que 2969 ne divise pas $u \times m$

0,5 pt **d)** En déduire qu'on a aussi $(u \times m)^{2968} \equiv 1\ [2969]$.

0,5 pt **2 - a)** En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.

0,5 pt **b)** Montrer que : $n^8 + m^8 \equiv 0\ [2969] \Longleftrightarrow n \equiv 0\ [2969]$ et $m \equiv 0\ [2969]$.

Exercice 4 : (10 points)

PARTIE I - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x\left(e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - 1\right)$ et on note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f'(x) = 4\left(e^{-x} - 1\right)(1-x)$

0,75 pt **b)** Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **c)** Montrer que : $\exists! \alpha \in \left]\dfrac{3}{2}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$ (On prendra $e^{\frac{3}{2}} = 4.5$)

0,25 pt **d)** Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$

0,5 pt **3 - a)** En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f', montrer qu'il existe x_0 de l'intervalle $]0;1[$ tel que : $f''(x_0) = 0$

0,5 pt **b)** En appliquant le théorème des accroissement finis à la fonction f'' , montrer que pour tout x différent de x_0 de l'intervalle $[0;1]$, on a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0} > 0$

0,25 pt **c)** En déduire que $I(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **4 - a)** Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,5 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$, $f(1) = -0,5$ et il n'est pas demandé de représenter le point I)

0,25 pt **5 - a)** Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty;\alpha])$; $f(x) \leq 0$

0,75 pt **b)** Montrer que : $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)\mathrm{d}x = \frac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$, puis en déduire que : $\dfrac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$

0,5 pt **c)** Calculer en fonction de α, en cm^2, l'aire du domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE II - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 < \alpha \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + f(u_n)$$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_n < \alpha$ (utiliser 5-a) de la PARTIE I)

0,25 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2 - On suppose que $0 \leq u_0$ et on pose $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$

0,5 pt **a)** Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$; $g(x) > 0$ (On prendra : $\ln(2) = 0,69$)

0,5 pt **b)** En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n$ (On remarque que : $f(x) + x = 4xg(x)$)

0,25 pt **c)** Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3 - On suppose que $u_0 < 0$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \leq u_0 + nf(u_0)$

0,25 pt **c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2019

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Calcul des probabilités** .... **3 points**
- Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** .... **10 points**

Exercice 1 : (3.5 pts)

Soit α un nombre complexe non nul.

partie A :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E_\alpha)\ :\ z^2 - \mathrm{i}\alpha\sqrt{3}z - \alpha^2 = 0$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de (E_α) est : $\Delta = \alpha^2$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α)

0,5 pt **2 -** Sachant que $\alpha = |\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponentielle.

partie B :

On suppose que le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère les points Ω, M_l et M_2 d'affixes respectivement α, $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\alpha$ et $z_2 = \dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\alpha$ et soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $R(\Omega) = M_1$ et que $R(M_1) = M_2$

0,25 pt **b)** En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1$, et OM_1M_2 sont équilatéraux.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$

0,5 pt **b)** Montrer que Les deux droites (ΩM_2) et (OM_1) sont orthogonales.

0,25 pt **c)** En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

0,5 pt **3 -** Montrer que pour tout réel θ, le nombre : $Z = \dfrac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha} \div \dfrac{z_2-|\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{z_1-|\alpha|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ est une réel.

Exercice 2 : (3 pts)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$). On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1 pt **1 -** Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1 pt **2 -** Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1 pt **3 -** On considère la variable aléatoire X_n égale au nombre de tirages nécessaire pour obtenir les boules 1, 2 et 3.

Detérminer la loi de probabilité de X_n

Exercice 3 : (3.5 pts)

On considère l'espace vectoriel de dimension 2 noté $(V_2,+,.)$.

Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base de V_2. On pose : $\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie par :

$\forall (x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4 \quad \left(x\vec{i}+y\vec{j}\right) * \left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right) = (xx'+yy')\,\vec{i} + (xy'+yx')\,\vec{j}$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$ est une base de V_2

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}$; $\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\forall (X,X',Y,Y') \in \mathbb{R}^4 \left(X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2}\right) * \left(X'\overrightarrow{e_1}+Y'\overrightarrow{e_2}\right) = XX'\overrightarrow{e_1}+YY'\overrightarrow{e_2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la loi $*$ est commutative.

0,25 pt **b)** Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 pt **c)** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

0,25 pt **d)** Montrer que $(V_2,+,*)$ est un anneau commutatif unitaire.

3 - Soit $\vec{u} \in V_2 - \{\vec{0}\}$. On note $E_{\vec{u}} = \{\lambda\vec{u} / \lambda \in \mathbb{R}\}$

0,25 pt **a)** Montrer que $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe du groupe $(V_2,+)$

0,25 pt **b)** Montrer que $(E_{\vec{u}},+,.)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(V_2,+,.)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $E_{\vec{u}}$ stable pour $* \iff$ la famille $(\vec{u}*\vec{u},\vec{u})$ est liée

4 - On suppose que : $(\exists\alpha \in \mathbb{R}^*)$; $\vec{u}*\vec{u} = \alpha\vec{u}$

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to E_{\vec{u}} \\ x \mapsto \dfrac{x}{\alpha}\vec{u} \end{array}$

0,5 pt **a)** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},*)$

0,25 pt **b)** En déduire que $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : (10 pts)

partie A :

On considère la fonction g définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $g(x) = 1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = 2$

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$

0,5 pt **2 -** Montrer que g est dérivable sur I et que $(\forall x \in I)$; $g'(x) = -2(1+2x)\ln(1+x)$

3 - On donne le tableau de variations de g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que : $g(\alpha) = 0$

0,25 pt **b)** Vérifier que : $\alpha < 1$ (On prendra : $\ln 2 = 0.7$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in]-1;\alpha[)$; $0 < g(x)$ et que $(\forall x \in]\alpha;+\infty[)$; $g(x) < 0$

partie B :

On considère la fonction f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Soit (C) sa courbe représentative dans repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0,5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que f est dérivable sur I et que : $(\forall x \in I)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

0,5 pt **b)** Donner le sens de variation de f sur I

0,75 pt **c)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$ et que $(\forall x \in I)$ $f(x) \leq \dfrac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

0,25 pt **3 - a)** Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x > 0)$; $\ln(1+x) < x$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(\forall x > 0)$; $f(x) < x$

1pt **d)** Représenter graphiquement (T) et (C) (On prendra : $\alpha = 0.8$ et $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$)

partie C :

On pose : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

1 pt **1 - a)** En utilisant le changement de variable : $t = \dfrac{1-x}{1+x}$, montrer que : $J = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$

0,5 pt **b)** - Déterminer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la tangente (T), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$

1 pt **2 -** En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x}\mathrm{d}x$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juillet 2020

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Arithmétiques** (au choix avec exercice 2) .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques**(au choix avec exercice 1) .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Nombres complexes** (obligatoire) .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** (obligatoire) .... **13 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter **Exercice 1**, il ne faut pas traiter **Exercice 2**

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(D): \quad 7x^3 - 13y = 5$

1 - Soit $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ une solution de l'équation (D).

0,5 pt **a)** Montrer que x et 13 sont premier entre eux.

0,5 pt **b)** En déduire que : $x^{12}\equiv 1\ [13]$

1 pt **c)** Montrer que : $x^3\equiv 10\ [13]$

0,5 pt **d)** En déduire que : $x^{12}\equiv 3\ [13]$

1 pt **2 -** Déduire des questions précédentes, que l'équation (D) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : (3.5 points/au choix)

Si tu choisis de traiter **Exercice 2**, il ne faut pas traiter **Exercice 1**

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E.

0,5 pt **c)** Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R}^*);\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

0,5 pt **2 -** Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3 - On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x&x-1\\0&x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}^*\right\}$

0,5 pt **a)** Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*); \quad \varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

1 pt **b)** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

Exercice 3 : (3.5 points/obligatoire)

Soit m un nombre complexe non nul.

Première partie :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $\quad (E): z^3-2mz^2+2m^2z-m^3=0$

0,5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) (On remarque que m est une solution de l'équation (E))

2 - On note z_1 et z_2 les deux autres solutions de l'équation (E) autre que m.

0,25 pt **a)** Vérifier que : $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{1}{m}$.

0,5 pt **b)** Dans le cas où $m = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$, écrire sous la forme algébrique z_1 et z_2 .

Deuxième partie :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = me^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = me^{-i\frac{\pi}{3}}$.

On note :

— P le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme O en A.

— Q le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme A en B.

— R le centre de la rotation d'angle $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme B en O.

0,25 pt **1 -** Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

1 pt **2 - a)** Montrer que l'affixe de P est $p = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ et que l'affixe de R est $r = m\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

0,5 pt **b)** Montrer que l'affixe de Q est $q = m\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

0,5 pt **3 -** Montrer que $OQ = PR$ et les deux droites (OQ) et (PR) sont perpendiculaires.

Exercice 4 : (13 points/obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } (\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad f(x) = x^3 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

0,5 pt **1 -** On appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln(t)$ sur l'intervalle $[x; x+1]$, montrer que : (P) : $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la proposition (P), montrer que la fonction f est dévrivable à droite en 0.

0,5 pt **b)** En utilisant la proposition (P), montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche paraboliques dont on précisera la direction.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad f'(x) = 3x^2\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{3(1+x)}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que f est strictement croissante sur I (On pourra utiliser la proposition (P))

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4 - pour tout $x \in]0; +\infty[$, on pose : $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

0,75 pt **a)** Vérifier que $(\forall x \in]0; +\infty[) \quad ; \quad g'(x) = 2x\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2(x+1)}\right)$, en déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 pt **b)** Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet sur $\mathbb{R}_+^*$, une solution unique notée α puis vérifier que $\alpha \in]1; 2[$ (On prendra $\ln(2) = 0,7$ et $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 1,5$))

0,5 pt **c)** En déduire que les seuls solutions de l'équation $f(x) = x$ sont 0 et α.

0,5 pt **5 - a)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C})$ (On précisera la demi-tangente à droite en O et la branche parabolique de $(\mathcal{C})$)

0,25 pt **b)** Montrer que f est une bijection de I vers I . (On notera f^{-1} sa bijection réciproque)

Deuxième partie :

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $0 < u_0 < \alpha$ et $(\forall n \in \mathbb{N});\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0,5 pt **1 -** Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\quad 0 < u_n < \alpha$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $g\left(]0;\alpha[\right) =]0;1[$.

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

0,5 pt **3 -** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Troisième partie :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle I par : $(\forall x \in I)\quad ;\quad F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Étudier suivant les valeurs de x, le signe de $F(x)$.

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction F est dérivable sur I et déterminer sa dérivée première F'.

0,25 pt **c)** En déduire que F est strictement décroissante sur I.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in [1;+\infty[)\quad ;\quad F(x) \leq (1-x)\ln(2)$.

0,25 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **3 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\quad ;\quad F(x) = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{x^4}{4}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$$

.

0,5 pt **b)** Calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ (On remarque que $\dfrac{t^3}{t+1} = t^2 - t + 1 - \dfrac{1}{t+1}$)

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in]0;+\infty[);\quad F(x) = \dfrac{5}{24} - \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}\ln(1+x) - \dfrac{x^4}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

0,5 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$

4 - Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

0,5 pt **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$:

$$-\frac{1}{2n}f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad ;\quad -\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq v_n \leq -\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

(On remarquera que : $\dfrac{2k+1}{2n} < \dfrac{k+1}{n}$)

0,25 pt **c)** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2020

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte quatre exercices indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

- Exercice 1 : **Arithmétique** (au choix) .... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures Algébriques** (au choix) .... **3.5 points**
- Exercice 3 : **Les Nombres Complexes** (obligatoire) .... **3.5 points**
- Exercice 4 : **L'analyse** (obligatoire) .... **13 points**

Le candidat doit traiter au total trois exercices

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z

♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Tu choisis de traiter EXERCICE 1 ou bien EXERCICE 2

Tu traites obligatoirement EXERCICE 3 et EXERCICE 4

Exercice 1 : (3.5 pts / au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE 1 il ne faut pas traiter EXERCICE 2

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $p < q$ et $9^{p+q-1} \equiv 1\ [pq]$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

1 pt **b)** En déduire que : $9^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et que $9^{q} \equiv 1\ [p]$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p = 2$

0.5 pt **3 - a)** En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1} \equiv 1\ [q]$

0.5 pt **b)** En déduire que : $q = 5$

Exercice 2 : (3.5 pts / au choix)

Si tu choisis de traiter EXERCICE 2 il ne faut pas traiter EXERCICE 1

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 3 à coefficients réels.

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ est un espace vectoriel réel de dimension 9 et que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire de zero $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère le sous-ensemble : $E = \left\{ M(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} / (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

Première partie :

0.25 pt **1 - a)** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

0.5 pt **b)** Déterminer une base de $(E,+,.)$

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que :

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \forall (x',y',z') \in \mathbb{R}^3 \ ; \ M(x,y,z) \times M(x',y',z') = M(xx'-yy', xy'+yx', zz')$

0.5 pt **b)** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

Deuxième partie :

On considère le sous-ensemble F de E des matrices de la forme $M(x,y,0)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

0.25 pt **1 -** Montrer que F est un sous-groupe du groupe $(E,+)$

2 - On note φ l'application de $\mathbb{C}^*$ vers E définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \varphi(x+iy) = M(x,y,0)$

0.25 pt **a)** Monter que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

0.5 pt **b)** En déduire que $(F^*, \times)$ est un groupe commutatif. (F^* désigne $F - \{O\}$)

0.5 pt **c)** Montrer que $(F, +, \times)$ est un corps commutatif dont on précisera l'unité.

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que : $(\forall M(x,y,0) \in F) \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times M(x,y,0) = O$

0.25 pt **b)** En déduire qu'aucun des éléments du sous-ensemble F n'admet un inverse pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

Exercice 3 : (3.5 pts / obligatoire)

I- Soit m un nombre réel non nul.

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, les deux équations :

$$(E) : z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{et} \quad (F) : z^3 + 2(1-i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1+m^2) = 0$$

0.5 pt **1 -** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

0.25 pt **2 - a)** Montrer que l'équation (F) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)

II- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

On considère les deux points : $A(-1+im)$ et $B(-1-im)$

Soient Ω le milieu du segment $[AB]$, A' le milieu du segment $[OB]$ et B' le milieu du segment $[OA]$

La rotation de centre Ω et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme A en $P(p)$, la rotation de centre A' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme B en $Q(q)$ et la rotation de centre B' et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ transforme O en $R(r)$

1.5 pt **1 -** Montrer que : $p = -1 + m$, $\quad q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$ et $r = \bar{q}$

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que : $q - r = -ip$

0.5 pt **b)** En déduire que : $OP = QR$ et que les deux droites (OP) et (QR) sont orthogonales.

Exercice 4 : (13 pts / obligatoire)

Première partie :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0,1]$ par $f(x) = x\ln(2-x)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.75 pt **1 - a)** Montrer que f est dérivable sur I et que : $\forall x \in I \ ; \ f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur I

0.75 pt **c)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que : $f'(\alpha) = 0$ et que $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$

0.75 pt **2 - a)** Étudier les variations de f, puis donner son tableau de variations.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe (C) est concave.

0.5 pt **c)** Montrer que : $(\forall t \in I)$, $(\forall x \in I)$; $f(x) \leqslant f'(t)(x-t) + f(t)$

0.5 pt **d)** En déduire que : $(\forall x \in I)$; $f(x) \leqslant x\ln(2)$ et $f(x) \leqslant -x+1$.

0.5 pt **3 -** Représenter la courbe (C) (On prendra : $\|\vec{i}\| = 2cm$)

0.75 pt **4 -** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$

Deuxième partie :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $I = [0,1]$ par : $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que f_n est positive sur I et que $f_n(0) = f_n(1)$

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe au moins $\alpha_n \in]0,1[$ tel que : $f'_n(\alpha_n) = 0$

0.75 pt **2 - a)** Montrer que f_n est dérivable sur I et que : $\forall x \in I$; $f'_n(x) = x^{n-1} g_n(x)$ où : $g_n(x) = n \ln(2-x) - \dfrac{x}{2-x}$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur I

0.5 pt **c)** En déduire que α_n est unique.

3 - On considère la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ ainsi définie.

1 pt **a)** Montrer que : $\forall n \geqslant 2$; $f_n(\alpha_n) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = 0$

1 pt **b)** Montrer que : $\forall n \geqslant 2$; $g_n(\alpha_{n+1}) = -\ln(2-\alpha_{n+1})$, en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

0.25 pt **c)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

0.5 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$

Troisième partie :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$

0.75 pt **1 -** Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante en déduire qu'elle est convergente.

0.5 pt **2 -** En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{2-x}\, dx$

0.75 pt **3 -** Montrer que : $(\forall n \geqslant 2)$; $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2021

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé ;

✓ L'usage de la couleur rouge ln'est pas autorisé ;

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve comporte 3 exercices indépendants.

Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

— Exercice 1 : **Problème d'Analyse** .... **12 points**
— Exercice 2 : **Nombres Complexes** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **4 points**

Exercice 1 : (12 pts)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{-2e^x}{1+e^x} + nx$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

(on prend $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm$*)*

Partie I :

0.5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x) - nx + 2)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ admet, en $-\infty$, une asymptote (Δ_n) dont on déterminera une équation cartésienne.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; f_n'(x) = \frac{-2\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + n$$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; \dfrac{4\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} \leq 1$.

c) En déduire le sens de variations de f_n sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt *(On distinguera les deux cas :* $n = 0$ *et* $n \geq 1$*)*

0.5 pt **3 - a)** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ au point I d'abscisse 0.

0.5 pt **b)** Montrer que le point I est le seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

0.5 pt **4 -** Représenter graphiquement dans le même repère, les deux courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

5 - Pour tout réel $t > 0$, on pose $A(t)$ l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_n)$ et les droites d'équations respectives : $y = nx - 2$, $x = 0$ et $x = t$

0.5 pt **a)** Calculer $A(t)$ pour tout $t > 0$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = f_0(u_n)$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que l'équation $f_0(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; |f_0'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |\alpha|$.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Partie III :

On suppose dans cette partie que n est un entier tel que $n \geq 2$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel x_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $0 < x_n < 1$.

$$\left(\textit{On prendra} \quad \frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}} < 1.47 \right)$$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(x_n) > 0$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

0.5 pt **c)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < x_n < \frac{1}{n}\left(\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right)$.

0.5 pt **b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, puis montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n x_n = 1$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \leq x_2$

0.5 pt **b)** En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)^n$.

Exercice 2 : (4 pts)

Soient a , b et c trois nombres complexes non nuls tel que : $a + b \neq c$

0.5 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E) \;:\; z^2 - (a+b+c)\,z + c\,(a+b) = 0$$

0.5 pt **b)** On suppose dans cette question que : $a = \mathrm{i}$, $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c = a - b$

Ecrire les deux solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle.

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les trois points $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ qu'on suppose non alignés.

Soient $P(p)$ le centre de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui transforme B en A , et $Q(q)$ le centre de rotation d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ qui transforme C en A , et $D(d)$ le milieu du segment $[BC]$.

1 pt **a)** Montrer que : $2p = b + a + (a-b)\,\mathrm{i}$ et $2q = c + a + (c-a)\,\mathrm{i}$

0.5 pt **b)** Calculer : $\dfrac{p-d}{q-d}$

0.5 pt **c)** En déduire la nature du triangle PDQ

3 - Soient E le symétrique de B par rapport à P et F le symétrique de C par rapport à Q et K le milieu du segment $[EF]$.

0.5 pt **a)** Montrer que l'affixe de K est $k = a + \frac{\mathrm{i}}{2}(c-b)$.

0.5 pt **b)** Montrer que les points K , P , Q et D sont cocycliques.

Exercice 3 : (4 pts)

<u>Partie I :</u> On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x - 43y = 1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11, 12)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0.75 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(F)\ :\ x^{41} \equiv 4\ [43]$.

1 - Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F).

0.5 pt **a)** Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1\ [43]$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $4x \equiv 1\ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11\ [43]$.

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F).

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant $(S)\ :\ \begin{cases} x^{41} \equiv 4\ [43] \\ x^{47} \equiv 10\ [47] \end{cases}$.

1 - Soit x une solution du système (S).

0.5 pt **a)** Montrer que x est solution du système $(S')\ :\ \begin{cases} x \equiv 11\ [43] \\ x \equiv 10\ [47] \end{cases}$.

0.5 pt **b)** En déduire que : $x \equiv 527\ [2021]$ *(On pourra utiliser la partie* I *).*

0.5 pt **2 -** Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2021

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Analyse** .... **8 points**
— Exercice 2 : **Analyse** .... **4 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **4 points**
— Exercice 4 : **Arithmétique** .... **4 points**

Exercice 1 : (8 pts)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty;1[$ par : $f(x) = \ln(1-x)$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f est continue sur I

0,25 pt **b)** Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur I

0,75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0,5 pt **d)** Interpréter graphiquement les résultats obtenus

0,25 pt **e)** Donner le tableau de variations de f

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la courbe (C) est concave.

0,25 pt **b)** Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,25 pt **3 - a)** Montrer que f est une bijection de I vers $\mathbb{R}$
On note f^{-1} sa bijection réciproque.

0,25 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

0,25 pt **c)** Vérifier que : $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

Partie II :

Pour tout réel x et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0;1[$ tel que : $P_n(x_n) = 1$

0,5 pt **2 -** Déterminer le réel $\alpha = x_2$ et vérifier que : $0 < \alpha < 1$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $P_{n+1}(x_n) > 1$

0,5 pt **b)** En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0,25 pt **c)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $x_n \in]0;\alpha]$

0,25 pt **d)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4 - pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall x \in I)$; $(\forall n \geq 2)$ $f_n'(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in [0;\alpha])$; $(\forall n \geq 2)$ $\left|f_n'(x)\right| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **c)** En déduire que : $(\forall x \in [0;\alpha])$; $(\forall n \geq 2)$ $|f_n(x)| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **d)** Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ $|f(x_n) + 1| \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}$

0,5 pt **e)** En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to +\infty} x_n$

Exercice 2 : (4 pts)

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{t-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$

0,5 pt **1 - a)** Déterminer le signe de $F(x)$ en fonction de x

1 pt **b)** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée première $F'(x)$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par partie, montrer que :

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

0,5 pt **b)** Calculer $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x$

3 - On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left((n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\mathrm{e}^{x-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\right)$$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}F\left(\frac{k}{n}\right)$

0,5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 : (4 pts)

m est un nombre complexe différent de 2 et de $-\mathrm{i}$

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E)\ :\ z^2-(m-\mathrm{i})z-\mathrm{i}m=0$$

0,5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $(m+\mathrm{i})^2$

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0,75 pt **c)** Sachant que $m=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$, écrire le nombre z_1+z_2 sous forme exponentielle.

2 - On considère les points A, B et M d'affixes respectifs 2, $-\mathrm{i}$ et m et soit M' le symétrique de M par rapport à l'axe imaginaire.

0,5 pt **a)** Déterminer en fonction de m l'affixe de M'

0,75 pt **b)** Déterminer en fonction de m l'affixe du point N tel que le quadrilatére $ANM'B$ soit un parallélogramme.

1 pt **c)** Montrer que les deux droites (AM) et (BM') sont perpendiculaires si et seulement si $\Re e\left((2-i)\,m\right)=\Re e\left(m^2\right)$

Exercice 4 : (4 pts)

Soit a un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$

Soit p un nombre premier impair tel que : p divise A

1 pt **1 - a)** Montrer que $a^7 \equiv 1[p]$, en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$; $a^{7n} \equiv 1[p]$

1 pt **b)** Montrer que a et p sont premiers entre eux, en déduire que : $(\forall m \in \mathbb{N})$; $a^{(p-1)m} \equiv 1[p]$

2 - On suppose que 7 ne divise pas $p-1$

0,5 pt **a)** Montrer que : $a \equiv 1[p]$

0,5 pt **b)** En déduire que : $p = 7$

1 pt **3 -** Montrer que si p un nombre premier impair tel que : p divise A, alors : $p = 7$ ou $p \equiv 1[7]$

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session Normale juin 2022

★ROYAUME DU MAROC ★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **10 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Arithmétiques** .... **3 points**
— Exercice 4 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : (10 pts)

Partie A :

0,25 pt **1 -** Vérifier que, $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0,25 pt **2 -** En déduire que, $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{+}\right)$; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

Partie B : On considère la fonction f définie sur $I = [0;+\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0;+\infty[\,:\, f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonrmé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 pt **b)** Montrer que f est dérivable à droite en 0

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0,5 pt **2 - a)** Montrer que, $(\forall x \in]0;+\infty[)$;, $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

où : $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

0,5 pt **b)** Montrer que , $(\forall x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0,25 pt **c)** En déduire que, $(\forall x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0,25 pt **d)** Déterminer le sens de variations de f

0,25 pt **3 - a)** Dresser le tableau de variation de f

0,5 pt **b)** Représenter grahiquement la courbe (C) dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

(On prendra $||\vec{\imath}|| = 2cm$ et $||\vec{\jmath}|| = 2cm$)

Partie C :

0,5 pt **1 -** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2 - On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_n \in [0;1]$

0,5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)|u_n - \alpha|$

0,5 pt **c)** Montrer par récurrence que, $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Partie D : Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt$

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0,5 pt **2 - a)** En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; \quad F(x) = 2\ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x)$, puis déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$

0,5 pt **c)** Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

Partie E : On pose, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

0,5 pt **b)** En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone

0,25 pt **b)** En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

0,25 pt **c)** Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit m **un complexe non nul** donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Partie I : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z, $(E_m) : z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$

0,5 pt **1 -** Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

0,25 pt **2 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = [m(1-j)]^2$

0,5 pt **b)** Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0,5 pt **3 -** Dans cette question, on suppose que, $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

Partie II : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1+j)z$

0,25 pt **1 -** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ

2 - On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2

Et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application φ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0,75 pt **a)** Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$

0,25 pt **b)** Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0,5 pt **c)** En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{N}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{N}^2$ et soit p le plus petit diviseur premier de n

0,25 pt **1 - a)** Montrer que $(x+1)^n \equiv x^n \,[p]$

0,25 pt **b)** Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0,25 pt **c)** En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \,[p]$

0,5 pt **2 -** Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

3 - On suppose que n est impair

0,5 pt **a)** Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu+(p-1)v=1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0,25 pt **b)** Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr=1-(p-1)(v+nq)$

0,5 pt **c)** On pose : $v'=-(v+nq)$. Montrer que : $v'\geq 0$

0,5 pt **d)** Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}^2$

Exercice 4 : (3.5 pts)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0,25 pt **b)** Vérifier que pour tout a , b , c et d de $\mathbb{Z}$, on a :

$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$

0,5 pt **c)** Montrer que : $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2 - Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{Z}$ par :

$(\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2)\,;\,\varphi(M(a,b))=\left|a^2-3b^2\right|$

0,5 pt Monter que φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{Z},\times)$

3 - Soit $M(a,b)\in E$

0,25 pt **a)** Montrer que $M(a,b)\times M(a,-b)=\left(a^2-3b^2\right).I$

0,5 pt **b)** Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b))=1$

0,5 pt **c)** On suppose que $\varphi(M(a,b))=1$

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse

0,25 pt **4 - a)** Montrer que : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\,;\,\varphi(M(a,b))=0\Leftrightarrow a=b=0$

0,25 pt **b)** En déduire que l'anneau $(E,+,\times)$ est intègre.

0,25 pt **c)** Est-ce que $(E,+,\times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN

Baccalauréat Sciences mathématique

Session de Rattrapage juillet 2022

★ROYAUME DU MAROC★

MATHÉMATIQUES

Série : **Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

— Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **10 points**
— Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
— Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
— Exercice 4 : **Arithmétique** .... **3 points**

Exercice 1 : (10 points)

Partie A :

0.25 pt **1 -** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\ 1+x \leq e^{x}$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,;\ 0 \leq 1-e^{-x} \leq x$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+})\,;\ 0 \leq 1-x+\dfrac{x^{2}}{2}-e^{-x} \leq \dfrac{x^{3}}{6}$

0.5 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}} = -\dfrac{1}{2}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\ ;\quad f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}.$$

Et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 pt **b)** Vérifier que : $(\forall x>0)\,;\ \dfrac{f(x)-1}{x}=\dfrac{1-2x-e^{-2x}}{x^{2}}-\dfrac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}$

0.5 pt **c)** En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que la nombre dérivé à droite en 0 est $-\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall x>0)\,;\ f'(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{2}}\left(2x+1-e^{x}(1+x)\right)$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x>0)\,;\ f'(x) \leq -e^{-2x}$ (On pourra utiliser : $1+x \leq e^{x}$)

0.25 pt **c)** En déduire le sens de variations de f sur I

3 - On admet que : $(\forall x>0)\,;\ f''(x)=\dfrac{e^{-2x}}{x^{3}}\left(-4x^{2}-4x-2+e^{x}(2+2x+x^{2})\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : $(\forall x \geq 0)\,;\ 1+x+\dfrac{x^{2}}{2} \leq e^{x}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x>0)\,;\ f''(x)>0$

4 - On admet que : $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f'(x)=-\dfrac{3}{2}$

0.5 pt **a)** Montrer $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)=0$

0.5 pt **b)** En déduire que : $(\forall x \in I)\,;\ |f'(x)| \leq \dfrac{3}{2}$

0.5 pt **5 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f

0.25 pt **c)** Déterminer la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à sa demi-tangente au point $T(0,1)$

0.5 pt **d)** Représenter graphiquement la courbe $(\mathscr{C})$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Partie C :

1 - Pour tout x de $[0,1]$, on pose , $g(x)=f(x)-x$

0.5 pt **a)** Montrer que g est une bijection de $[0,1]$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

0.5 pt **b)** Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in\ ]0,1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

2 - Pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, on considère les nombres réels $x_k=\dfrac{k\alpha}{n}$ et on pose , $I_k=\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$ et $J_k=\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt$

0.5 pt a) Montrer que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t-x_k)dt$

0.5 pt b) En déduire que : $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$; $|J_k - I_k| \leq \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^2$

3 - On pose : $L = \displaystyle\int_0^{\alpha} f(t)dt$

0.5 pt a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|\dfrac{\alpha}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) - L\right| \leq \dfrac{3}{4}\dfrac{\alpha^2}{n}$

0.5 pt b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\dfrac{k\alpha}{n}\right) = \int_0^{\alpha} f(t)dt$

Exercice 2 : (3.5 pts)

Soit $m \in \mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\}$

Partie I : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z. $(E_m) : mz^2 - (m-1)^2 z - (m-1)^2 = 0$

0.25 pt **1 -** a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (m^2-1)^2$

0.5 pt b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

2 - On prend uniquement dans cette question $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

0.5 pt

Partie II : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

On considère les deux points A et B d'affixes respectifs $m-1$ et $\frac{1}{m}-1$

0.5 pt **1 -** Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R}$.

2 - On suppose que m n'est pas un nombre réel.

Soient C l'image du piont B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et D l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[OB]$.

0.5 pt a) Montrer que l'affixe du point C est : $c = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ et que l'affixe du point D est : $d = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.5 pt b) Montrer que : $2(p-r) = m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$ et $2(q-r) = (m-1)e^{i\frac{\pi}{3}} - \left(\frac{1}{m}-m\right)$

0.25 pt c) Montrer que : $q - r = e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$

0.5 pt d) Quelle est la nature du triangle PQR ? (justifier votre réponse)

Exercice 3 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre d'unité
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (La loi $\times$ étant la multiplication usuelle des matrices)

Pour tout réel a on pose $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+1 & 3 & -1 \\ 2a+3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ et soit $G = \{M(a)/a \in \mathbb{R}\}$

1 - Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $(\forall a \in \mathbb{R})\,;\ \varphi(a) = M(a)$

0.5 pt **a)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.5 pt **b)** Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$, en déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

0.5 pt **c)** Déterminer J l'élément neutre dans $(G,\times)$

0.5 pt **d)** Déterminer l'inverse de $M(a)$ dans $(G,\times)$

0.5 pt **e)** Résoudre dans $(G,\times)$ l'équation : $M(1)\times X = M(2)$

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})\,;\ M(a)\times J = M(a)\times I$

0.5 pt **b)** En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $M(a)$ n'est pas inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.25 pt **c)** Vérifier que les matrices de la forme $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$, sont solutions dans $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ de l'équation : $M(1)\times X = M(2)$

Exercice 4 : (3 points)

0.5 pt **1 -** Montrer que 137 est un nombre premier.

0.5 pt **2 -** Déterminer un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $38u + 136v = 2$

3 - Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que : $x^{38} \equiv 1[137]$

0.5 pt **a)** Montrer que x et 137 sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x^{136} \equiv 1[137]$

0.5 pt **c)** Montrer que : $x^2 \equiv 1[137]$

0.5 pt **4 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : x^{19} \equiv 1[137]$

$\boxed{\text{FIN}}$

CORRECTEURS

Liste des membres du groupe MTMgroup

Prénom	Nom	Direction Pédagogique
El Mustapha	Ait Youssef	AZILAL
JAOUAD	BELKADI	Taroudant
Lahcen	Lafdili	Guercif
HASSAN	MEGDOUL	Guelmim
Bouazza	LOUKILIA	Khouribga
NABIL	KCHIRI	SAFI
MOUNDIR	NICER	RHAMNA
MOHAMMED	LAKHAL	SIDI SLIMANE
MERIEM	ELMKHENTER	SAFI
ISSAM	KHALOUFI	MEDIOUNA
MOHAMED ABDESSAMAD	AZOUGA	Casablanca
OTMAN	ELHADDAOUI	KELAA DES SRAGHNA
BRAHIM	AIT IBBOUH	AZILAL
Khalid	Zaou	chtouka aït baha
CHARAF_EDDINE	BOUHAFS	sidi benour
YASSIR	NOUIHAL	MARRAKECH
Rachid	AOUISSI	TAOURIRT
ABDERRAHIM	HADDER	Casablanca
SAID	MANSOURI	MIDELT
Smail	Abouhouda	Casablanca
Rachid	Abou Israe	Sidi Kacem
ABDELKRIM-AMINE	IDRISSI	KÉNITRA
Ayoub	sadki	
HANANE	CHAHAT	TAZA
Abdellah	El Aabbadi	Agadir
ELALAMI	ELAMRAOUI	nom

RÉDACTEURS

Liste des membres du groupe MTMgroup

Prénom	Nom	Direction Pédagogique
SAID	EL-FATMI	ERRACHIDIA
El Mustapha	Ait Youssef	AZILAL
Abderrahim	Lamrani	Tanger-Assilah
Lahcen	Lafdili	Guercif
HASSAN	MEGDOUL	Guelmim
ABDENNABI	ELKHALIFI	Tanger Assilah
JAOUAD	BELKADI	Taroudant
ZAKARIA	HAJHOUJI	Casablanca
YASSIR	NOUIHAL	MARRAKECH
LAHCEN	ATTOUALI	SIDI KACEM
ABDELKRIM-AMINE	IDRISSI	KÉNITRA
AHMED	SAOURA	ESSAOUIRA
HANANE	CHAHAT	TAZA
MERIEM	ELMKHENTER	SAFI
ISSAM	KHALOUFI	MEDIOUNA
YOUSSEF	HADDOUZ	MARRAKECH
SAID	MENNOU	Casablanca
Bouazza	LOUKILIA	Khouribga
NABIL	KCHIRI	SAFI
MOUNDIR	NICER	RHAMNA
MOHAMMED	LAKHAL	SIDI SLIMANE
SAID	ABDELLAOUI	TANGER-ASSILAH
MOHAMED	SOUHAIL	Casablanca
MOHAMED ABDESSAMAD	AZOUGA	Casablanca
OTMAN	ELHADDAOUI	KELAA DES SRAGHNA
ADIL	BENNAJI	AGADIR
Hamza	EL ANDALOUSSI	TANGER-ASILAH
BRAHIM	AIT IBBOUH	AZILAL
ayoub	Laslami	Casablanca
Zakaria	Berki	El Hajeb
Khalid	Zaou	chtouka aït baha
CHARAF_EDDINE	BOUHAFS	sidi benour
Mohamed	GAFSI	
Rachid	AOUISSI	TAOURIRT
ABDERRAHIM	HADDER	Casablanca
Mohamed	Ferjani	El youssoufia
Smail	Abouhouda	Casablanca
SAID	MANSOURI	MIDELT
ABDELAALY	TADOUMMANT	TATA
OULAID	EN-FEUR	MIDELT
Said	Ait Ouahmane	Marrakech
Ali	ZAAOUAT	
MOHAMED	EDDEBDI	TANGER
Rachid	Abou Israe	Sidi Kacem
Mounir	ezahery	Berrechid
Ayoub	sadki	
Aziz	ouali	marakech
Abdellah	El Aabbadi	Agadir
ELALAMI	ELAMRAOUI	nom

MTM GROUP

newpage

BON COURAGE

★ ROYAUME ★ DU ★ MAROC ★

Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session : **NORMAL** 2023

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

❖ Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **7.75 points**
❖ Exercice 2 : **Problème d'analyse** .... **2.25 points**
❖ Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
❖ Exercice 4 : **Arithmétiques** .... **3 points**
❖ Exercice 5 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 **Session : NORMAL 2023** **7.75 Pts**

Partie I

0.5 pt
0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $\forall t \in \left[0, +\infty\right[; \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1+t)^2}\right)$

b) En déduire que : $\forall x \in \left[0, +\infty\right[; \frac{2x}{2+x} \leq \ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$

2 - Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

0.5 pt Montrer que : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$

Partie II

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty\left[; f(x) = g(x)e^{-x}\right.$$

0.5 pt On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.25 pt **1 -** Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **2 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 pt **b)** Vérifier que : $\forall x \in]0, +\infty\left[; \frac{f(x)-1}{x} = \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right) g(x) + \left(\frac{g(x)-1}{x}\right)\right.$

0.75 pt **c)** En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

3 - Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis que :

$$\forall x \in]0, +\infty\left[; f'(x) = \frac{x - (1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} e^{-x}\right.$$

0.5 pt
0.25 pt **4 - a)** Montrer que : $\forall x \in]0, +\infty\left[; \quad -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0\right.$

b) En déduire que : $\forall x \in]0, +\infty\left[; \quad -\frac{3}{2} < f'(x) < 0\right.$

0.25 pt **5 - a)** Dresser le tableau de variations de f

0.75 pt **b)** Construire la courbe (C) en faisant apparaître la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 . (On prendra $\|\vec{i}\| = 2$ cm)

Partie III

0.5 pt

1 - Montrer que l'équation d'inconnue x : $f(x)=3x$, admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$

2 - Soient $\beta \in \mathbb{R}^+$et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$u_0=\beta \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}; u_{n+1}=\frac{1}{3}f\left(u_n\right)$$

0.5 pt

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}; u_n\geq 0$

0.5 pt **b)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}; |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.25 pt **c)** Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}; |u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Exercice 2 Session : NORMAL 2023 2.25 Pts

On considère la fonction numérique : $x\mapsto e^x$ et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $k\in\{0;1;\ldots;n\}$, on note M_k le point de la courbe (Γ) de coordonnées $\left(\frac{k}{n};e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 pt

0.25 pt **1 - a)** Montrer que : $\forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\}\exists c_k\in\left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[$ tel que : $e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}$

b) Montrer que : $\forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\}$; $\quad M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

0.5 pt (M_kM_{k+1} désigne la distance de M_k à M_{k+1})

c) En déduire que : $\forall k\in\{0;1;\ldots;(n-1)\}$; $\quad \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leqslant M_kM_{k+1}\leqslant\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1])}{n}}}$

0.5 pt **2 -** Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*; S_n=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$

0.5 pt **a)** Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $\quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leqslant S_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}dx$

Exercice 3 Session : NORMAL 2023 3.5 Pts

On considère le nombre complexe : $u=1+(2-\sqrt{3})i$

0.5 pt **1 - a)** Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes : $1-i$ et $1+\sqrt{3}i$

0.25 pt **b)** Montrer que : $\frac{(1-i)(1+\sqrt{3}i)}{2\sqrt{2}}=e^{1\frac{\pi}{12}}$

0.25 pt **c)** En déduire que : $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$

0.5 pt **d)** Montrer que : $u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{\frac{i\pi}{12}}$

2 - On considère les deux suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définics par :

$$x_0=1, y_0=0 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N}); \begin{cases} x_{n+1}=x_n-(2-\sqrt{3})y_n \\ y_{n+1}=(2-\sqrt{3})x_n+y_n \end{cases}$$

0.5 pt
0.5 pt

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n + iy_n = u^n$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ et $y_n = \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$

3 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e_2})$ Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe u^n

0.5 pt **a)** Déterminer les entiers n pour lesquels les points O, A_0 et A_n sont alignés.

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout entier n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n

Exercice 4 Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2[p]$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1[p]$

0.25 pt **b)** En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$

(On remarque que : $\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = 2^{p-1} - 1$)

2 - Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 pt **a)** Montrer que p et x sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$ (On pourra utiliser le théorème de Fermat)

0.25 pt **c)** Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}, p$ divise C_p^k

(On rappelle que : $(\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}) \quad C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ et que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$)

0.25 pt **3 - a)** En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

$$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) + i2^{\frac{p}{2}} \sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i étant le nombre complexe tel que : $i^2 = -1$)

0.5 pt **b)** On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1[p]$ (on pourra utiliser la question3-)

0.5 pt **4 -** En déduire que si $p \equiv 5[8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

Exercice 5 Session : NORMAL 2023 — 3.5 Pts

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R_R}), +, x)$ est un anneau non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

et d'unité la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est un espace vectoriel réel.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix} / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Partie I

0.5 pt

0.25 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 pt **2 -** Montrer que E est un sous- espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que : $\forall\,(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4; M(x,y) \times M\,(x',y') = M\,(xx'+3yy', xy'+yx')$

0.25 pt **b)** En déduire que $(E,+,x)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que : $M(\sqrt{3},1) \times M(-\sqrt{3},1) = O$

b) En déduire que $(E,+,\times)$ n'est pas un corps.

Partie II

Soient $F = \left\{x + y\sqrt{3}/(x,y) \in \mathbb{Q}^2\right\}$ et $G = \left\{M(x,y) = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 2y & x-y \end{pmatrix}/(x,y) \in \mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 pt

0.25 pt **1 -** Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2; x + y\sqrt{3} = 0$ sietseulementsi $(x = 0$ et $y = 0)$

2 - Montrer que $F - \{0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*,\times)$

3 - Soit φ l'application définie de $F - \{0\}$ vers E par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2 - \{(0,0)\}; \varphi(x + y\sqrt{3}) = M(x,y)$$

0.25 pt

0.25 pt **a)** Vérifier que : $\varphi(F - \{0\}) = G - \{O\}$

0.25 pt **b)** Montrer que φ est un homomorphisme de $(F - \{0\},\times)$ vers $(E,\times)$

0.25 pt **c)** En déduire que $(G - \{O\},\times)$ est un groupe commutatif.

4 - Montrer que $(G,+,\times)$ est un corps commutatif.

FIN

★ R O Y A U M E ★ D U ★ M A R O C ★

Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B

Épreuve de Mathématiques

Session : **RATTRAPAGE** 2023

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

❖ Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **10 points**
❖ Exercice 2 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
❖ Exercice 3 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
❖ Exercice 4 : **Arithmétique** .... **3 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 Session : RATTRAPAGE 2023 10 Pts

Partie I

On considére la fonction f_n définie sur $I = [0;+\infty[$ par :

$f_n(0) = 0$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $f_n(x) = \sqrt{x}\,(\ln x)^n$; avec n un entier naturel **non nul**

Et soit $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $(x \in]0;+\infty[)$; $\sqrt{x}(\ln x)^n = (2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}} \ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$; et en déduire que f_n est continue en 0

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$

0.75 pt **c)** Vérifier que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $\dfrac{f'_n x}{x} = (2n)^n\left[\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right]^n$, et en déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.5 pt **d)** Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{f_n(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.75 pt **2 - a)** Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $f'_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)$

0.25 pt **b)** Vérifier que $(\forall n \geqslant 2)$; $f'_n(x) = 0$ si est seulement si $(x = 1$ ou $x = \mathrm{e}^{-2n})$

1 pt **c)** Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n, et donner son tableau de variations

0.25 pt **d)** Montrer que si n est impair, et $n \geqslant 3$, alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $(\mathcal{C}_n)$

Partie II

On considére la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$; $u_n = f_n(\beta)$ avec $\beta \in]1;\mathrm{e}[$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^\star)$; $0 < u_n < \sqrt{\mathrm{e}}$

0.25 pt **b)** Montrer que la suite : $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante

0.25 pt **c)** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n \in]1;\mathrm{e}[$ tel que : $f_n(x_n) = 1$

0.75 pt **b)** Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ainsi définie est croissante, en en déduire qu'elle est convergente

3 - On pose : $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 pt **a)** Montrer que $1 < l \leqslant \mathrm{e}$

0.25 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$

0.25 pt **c)** Montrer que si $l < \mathrm{e}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 pt **d)** En déduire la valeur de l

Partie III

On pose pour tout $x \in I$; $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \Big(f_1(t)\Big)^2 \mathrm{d}t$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que la fonction F est continue sur I

1 pt **b)** En utilisant une double intégration par partie, montrer que $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}\ln^2(x) + \dfrac{x^2}{2}\ln(x) + \dfrac{1}{4}(1-x^2)$

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$

0.25 pt **b)** En déduire la valeur de $F(0)$

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ relative à l'intervalle $[0;1]$ $\left(\left\|\overrightarrow{\mathrm{i}}\right\| = 1cm\right)$

Exercice 2 Session : RATTRAPAGE 2023 3.5 Pts

Partie I

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant, (S) $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right) \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right) \end{cases}$

1 - Soit $(x;y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). on pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

On note d'abore que l'ensemble de définition du système (S) est : $D = \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\right) \setminus \{(0;0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i$

0.75 pt **b)** Montrer que $z^2 - \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$, et déduire les valeurs possibles de z

025 pt **c)** En déduire les valeurs du couple $(x;y)$

0.5 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$

Soit (U) le cercle de centre O te de rayon 1 et $A(a)$; $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts

1 - Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})$; $|z|=1\Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

2 - a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$

0.5 pt Montrer que $p=\dfrac{bc}{a}$

b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$

0.5 pt Montrer que $q=-p$

c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$

Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires

Exercice 3 Session : RATTRAPAGE 2023 3.5 *Pts*

$$E=\left\{M(a;b;c)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & b & -c\\ 0 & c & b\end{pmatrix}/(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Rappel : $(M_3(\mathbb{R});+;\times)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité : $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

0.25 pt **1 -** Montrer que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R});+)$

2 - On munit l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi $\star$ tel que : $\forall\left((x;z);(x';z')\right)\in\left(\mathbb{R}\times\mathbb{C}^2\right)$; $(x;z)\star(x';z')=(x+x';z+z')$

On considére l'application φ définie de E vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ tel que : $\forall(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$; $\varphi\left(M(a;b;c)\right)=(a;b+ci)$

0.5 pt **a)** Montrer que φ est un endomorphisme de $(E;+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C};\star)$ et que $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.25 pt **b)** En déduire que $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}; \star)$ est un groupe commutatif

3 - On munit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall ((x;z);(x';z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2 \;\; ; \;\; (x;z)T(x';z') = (xRe(z') + x'Re(z); zz')$$

$(Re(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe $z)$

0.25 pt **a)** Montrer que T est commutative

0.25 pt **b)** Vérifier que $(0;1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

0.5 pt **c)** Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}; (1;i)T(x;-i) = (0;1)$; et en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

4 - Soit $G = \{(Im(z);z) \, / z \in \mathbb{C}\}$ $(Im(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe $z)$

0.25 pt **a)** Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}; \star)$

b) Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ par : $\forall z \in \mathbb{C}^*; \psi(z) = (Im(z); z)$

0.25 pt Montrer que ψ est un endomorphisme de $(\mathbb{C}^*; \times)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}; T)$

0.5 pt **c)** En déduire que $(G \backslash \{(0;0); T\})$ est un groupe commutatif

0.5 pt **5 -** Montrer que $(G; \star; T)$ est un corps commutatif

Exercice 4 Session : RATTRAPAGE 2023 3 Pts

Soit p un nombre impair, on pose : $S = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^{p-1}$

Soit q un nombre premier *positif* qui divise S

0.5 pt **1 - a)** Montrer que p et q sont premiers entre eux

0.25 pt **b)** En déduire que : $p^{q-1} \equiv 1[q]$

0.5 pt **c)** Vérifier que : $p^{p-1} = (p-1)S$, et en déduire que : $p^p \equiv 1[q]$

2 - Supposant que p et $q-1$ sont premiers entre eux

0.75 pt **a)** Montrer que : $p \equiv 1[q]$ en utilisant le théorème de **Bézout**

0.25 pt **b)** En déduire que $S \equiv 1[q]$

0.75 pt **3 -** Montrer que : $q \equiv 1[p]$

FIN

★ROYAUME★DU★MAROC★

Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B

Épreuve de Mathématiques

Session : **NORMAL** 2024

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

❖ Exercice 1 : **Problème d'analyse** .... **7.5 points**
❖ Exercice 2 : **Problème d'analyse** .... **2.5 points**
❖ Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
❖ Exercice 4 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
❖ Exercice 5 : **Arithmétiques** .... **3 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 **Session : NORMAL 2024** **7.5 Pts**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par

$$f(1)=\frac{1}{2} \quad \text{et pour tout } x\in\left]1,+\infty\right[, \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 pt **1 -** Montrer que f est continue à droite en 1 .

0.5 pt **2 -** Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt **3 - a)** Soit $x\in]1,+\infty[$. En posant $t=(x-1)^2$, vérifier que : $\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$

0.5 pt **b)** Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[$, on a : $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}<\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;t]$)

0.25 pt **c)** En déduire que : $\lim_{x\to1^+}\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que : $\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\quad \dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

0.5 pt **b)** En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5 - Pour tout $x\in[1,+\infty[$, on pose $I(x)=\int_1^x\dfrac{t^2-1}{t^3}dt$ et $J(x)=\int_1^x\dfrac{t^2-1}{t^2}dt$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall x\in[1,+\infty[,\quad 0\le I(x)\le J(x)$

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a : $I(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$

0.5 pt **c)** Montrer que : $\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\quad f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$

0.5 pt **d)** En déduire que : $\forall x\in\left]1,+\infty\right[,\quad -\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 0$

0.25 pt **6 - a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0.5 pt **b)** Tracer la courbe (C). (On prendra $\|\vec{i}\|=1$ cm et $\|\vec{j}\|=2$ cm)

0.5 pt **7 -** Montrer que l'équation $f(x)=x-1$ admet une unique solution a dans $]1,2[$.

8 - Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $a_0\in[1,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad a_{n+1}=1+f(a_n)$

0.5 pt **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad |a_{n+1}-a|\le\dfrac{1}{2}|a_n-a|$

0.5 pt **b)** Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad |a_n-a|\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n|a_0-a|$

0.25 pt **c)** En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 — Session : NORMAL 2024 — 2.5 Pts

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que F est continue et strictement croissante sur $[0;1]$.

0.5 pt **b)** En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta=\int_0^1 e^{t^2}dt$.

2 - On note F^{-1} la bijection réciproque de F.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

0.5 pt **a)** Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell=\frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$.

0.5 pt **b)** Montrer que $\ell=\frac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2}du$

(On pourra effectuer le changement de variable $u=F^{-1}(t)$)

0.5 pt **c)** En déduire que :$\ell=\frac{e-1}{2\beta}$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2024 — 3.5 Pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $(E_\alpha):z^2-2iz+\alpha=0$ où $\alpha\in\mathbb{C}$

Partie I

0.25 pt **1 - a)** Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta=-4(1+\alpha)$.

0.25 pt **b)** Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admet dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

0.5 pt **2 -** On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α)

Déterminer z_1+z_2 et z_1z_2.

Partie II

Soient Ω, M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α, z_1 et z_2.

1 - On suppose que $\alpha=m^2-2m$ avec $m\in\mathbb{R}$.

0.5 pt **a)** Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m.

0.25 pt **b)** En déduire que les points O, M_1 et M_2 sont alignés.

2 - On suppose que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

0.25 pt **a)** Montrer que $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=0$.

0.5 pt **b)** Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\,\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})$

0.25 pt **c)** En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$.

0.25 pt **3 - a)** Montrer que :$(z_1 - z_2)^2 = \Delta$

0.5 pt **b)** Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O.

Exercice 4 Session : NORMAL 2024 3.5 Pts

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif dont le zéro est la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'unité est la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$\forall((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)^2\,; \quad (a,b)T(c,d) = (a\bar{d} + c, bd)$

($\bar{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d).

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $(i,2)T(1,i) = (2,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$.

0.25 pt **b)** En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

0.5 pt **2 -** Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

0.25 pt **3 -** Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

0.5 pt **4 - a)** Vérifier que $\forall(a,b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, (a,b)T\left(-\dfrac{a}{\bar{b}}, \dfrac{1}{b}\right) = (0,1)$.

0.5 pt **b)** Montrer que $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T\ )$ est un groupe non commutatif.

0.5 pt **5 - a)** Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T.

0.5 pt **b)** Montrer que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.

Exercice 5 Session : NORMAL 2024 3 Pts

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q.

1 pt **1 - a)** Montrer que p divise $r^{p-1} - 1$ et que q divise $r^{q-1} - 1$.

0.5 pt **b)** En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

0.5 pt **c)** Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

1 pt **2 -** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3(\mathrm{mod}\,221)$. (On donne : $221 = 13 \times 17$).

FIN

★ R O Y A U M E ★ D U ★ M A R O C ★

Baccalauréat Sciences Mathématiques A & B

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Session : RATTRAPAGE 2024

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GÉNÉRALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

❖ Exercice 1 : **Analyse** .... **6.5 points**
❖ Exercice 2 : **Analyse** .... **3.5 points**
❖ Exercice 3 : **Nombres complexes** .... **3.5 points**
❖ Exercice 4 : **Structures algébriques** .... **3.5 points**
❖ Exercice 5 : **Arithmétique** .... **3 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 **Session :** Rattrapage 2024 **6.5 Pts**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique f_n définie sur $I = [0; +\infty[$ par :

$f_n(0) = 0$ et $\forall x \in]0; +\infty[\ ; \ f_n(x) = x - x^n \ln x$

Et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

0.25 pt **1 - a)** Montrer que f_n est continue à droite en 0

0.75 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

0.5 pt **c)** Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1

0.5 pt **d)** Montrer que f_n est dérivable sur$]0; +\infty[$ et que

$\forall x \in]0; +\infty[\ ; \ f'_n(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$

0.5 pt **e)** Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $\forall x \in [0; +\infty[\ ; \ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

0.25 pt **b)** En déduire la position relative des deux courbe $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]1; 2[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

(On prendra $\ln 2 \approx 0.7$)

0.25 pt **b)** Vérifier que $(\forall n \geq 2) \quad \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$

0.25 pt **c)** En déduire que pour tout $n \geq 2 \ , \ f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$

0.5 pt **d)** Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante

0.25 pt **e)** En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente

4 - On pose $l = \lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$

0.25 pt **a)** Montrer que $1 \leq l \leq 2$

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout $n \geq 2 \ , \ n - 1 = -\dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

0.25 pt **c)** On suppose que $l > 1$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ en fonction de l

0.5 pt **d)** En déduire que la valeur de la limite l

Exercice 2 — Session : Rattrapage 2024 — 3.5 Pts

0.25 pt **1 - a)** Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

0.5 pt **b)** Pour tout entier $n \geq 1$; on pose $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite

0.25 pt **2 -** Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \leq 1$

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $(\forall x \in [0;1])$; $0 \leq \mathrm{e}^x - 1 \leq \mathrm{e}x$

0.25 pt **b)** En déduire que $(\forall x \in [0;1])$; $0 \leq \mathrm{e}^x - 1 - x \leq \frac{\mathrm{e}}{2}x^2$

4 - Pour tout $n \geq 1$, on pose $w_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\mathrm{e}^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1\right)$

0.25 pt **a)** Montrer que : pour tout entier $n \geq 1$; $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)^2$

0.25 pt **b)** Montrer que la fonction : $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0;1]$

0.25 pt **c)** En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$, on a

$$\frac{1}{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2}\mathrm{d}x$$

0.5 pt **5 - a)** Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{2n}$

0.5 pt **b)** En déduire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3 — Session : Rattrapage 2024 — 3.5 Pts

Soit $m \in \mathbb{C}^*$

Partie I

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z ; $(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que le descriminant de l'équation (E) est $\Delta = (im)^2$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2 - Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0.5 pt Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = r\mathrm{e}^{i\theta}$ $(r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R})$

Partie II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$

Soit M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 et $M_3(z_3)$ l'image du point O par la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par l'homothétie de centre O et de rapport k $\left(k \in \mathbb{R}^* - \{1\}\right)$

0.75 pt **1 -** Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k

0.75 pt **2 -** Donner la forme algèbrique de $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

0.75 pt **3 -** En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$

Exercice 4 Session : Rattrapage 2024 3.5 Pts

On munit l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 \;;\; (x+iy) * (x'+iy') = (xy' + y^5 x') + iyy'$

Partie I

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que $1 * 2i = 2$

0.25 pt **b)** Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative

0.5 pt **2 -** Montrer que la loi $*$ est associative

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que : $1 * (1+2i) = 2$

0.25 pt **b)** En déduire que : $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe

4 - Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par $E = \left\{x + yi / x \in \mathbb{R} \mathbf{et} y \in \mathbb{R}^*\right\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C}, *)$

0.25 pt **b)** Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif

Partie II

On considère les sous-ensembles de E définies par $F = \left\{yi / y \in \mathbb{R}^*\right\}$ et $G = \left\{x + i / x \in \mathbb{R}\right\}$

0.5 pt **1 -** Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$

2 - On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})\,;\;\; \varphi(x) = x + i$

0.25 pt **a)** Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = G$

0.25 pt **b)** Montrer que φ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vares $(\mathbb{C}, *)$

0.25 pt **c)** En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif

Exercice 5 Session : Rattrapage 2024 3 Pts

0.5 pt **1 -** En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, \ldots\ldots, 22\}$ tel que $10u \equiv 1[23]$

2 - Soient m un entier naturel et q et r, respectivement, le quotient et le reste de la dicision euclidienne de m par 10

0.5 pt **a)** Montrer que $m \equiv 10(q + ur)[23]$

0.75 pt **b)** Montrer que : 23 divise $m \quad \Leftrightarrow \quad$ 23 divise $(q + ur)$

3 - On considère dans $\mathbb{N}$ le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 1[23] \\ x \equiv 2[10] \end{cases}$

0.75 pt **a)** Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$ et 23 divise $(q + 7)$

0.5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système (S)

$\boxed{\text{FIN}}$

CORRECTEURS

Liste des membres du groupe MTMgroup

Prénom	Nom	Direction Pédagogique
El Mustapha	Ait Youssef	AZILAL
JAOUAD	BELKADI	Taroudant
Lahcen	Lafdili	Guercif
HASSAN	MEGDOUL	Guelmim
Bouazza	LOUKILIA	Khouribga
NABIL	KCHIRI	SAFI
MOUNDIR	NICER	RHAMNA
MOHAMMED	LAKHAL	SIDI SLIMANE
MERIEM	ELMKHENTER	SAFI
ISSAM	KHALOUFI	MEDIOUNA
MOHAMED ABDESSAMAD	AZOUGA	Casablanca
OTMAN	ELHADDAOUI	KELAA DES SRAGHNA
BRAHIM	AIT IBBOUH	AZILAL
Khalid	Zaou	chtouka aït baha
CHARAF_EDDINE	BOUHAFS	sidi benour
YASSIR	NOUIHAL	MARRAKECH
Rachid	AOUISSI	TAOURIRT
ABDERRAHIM	HADDER	Casablanca
SAID	MANSOURI	MIDELT
Smail	Abouhouda	Casablanca
Rachid	Abou Israe	Sidi Kacem
ABDELKRIM-AMINE	IDRISSI	KÉNITRA
Ayoub	sadki	
HANANE	CHAHAT	TAZA
Abdellah	El Aabbadi	Agadir
ELALAMI	ELAMRAOUI	nom

MTM
GROUP

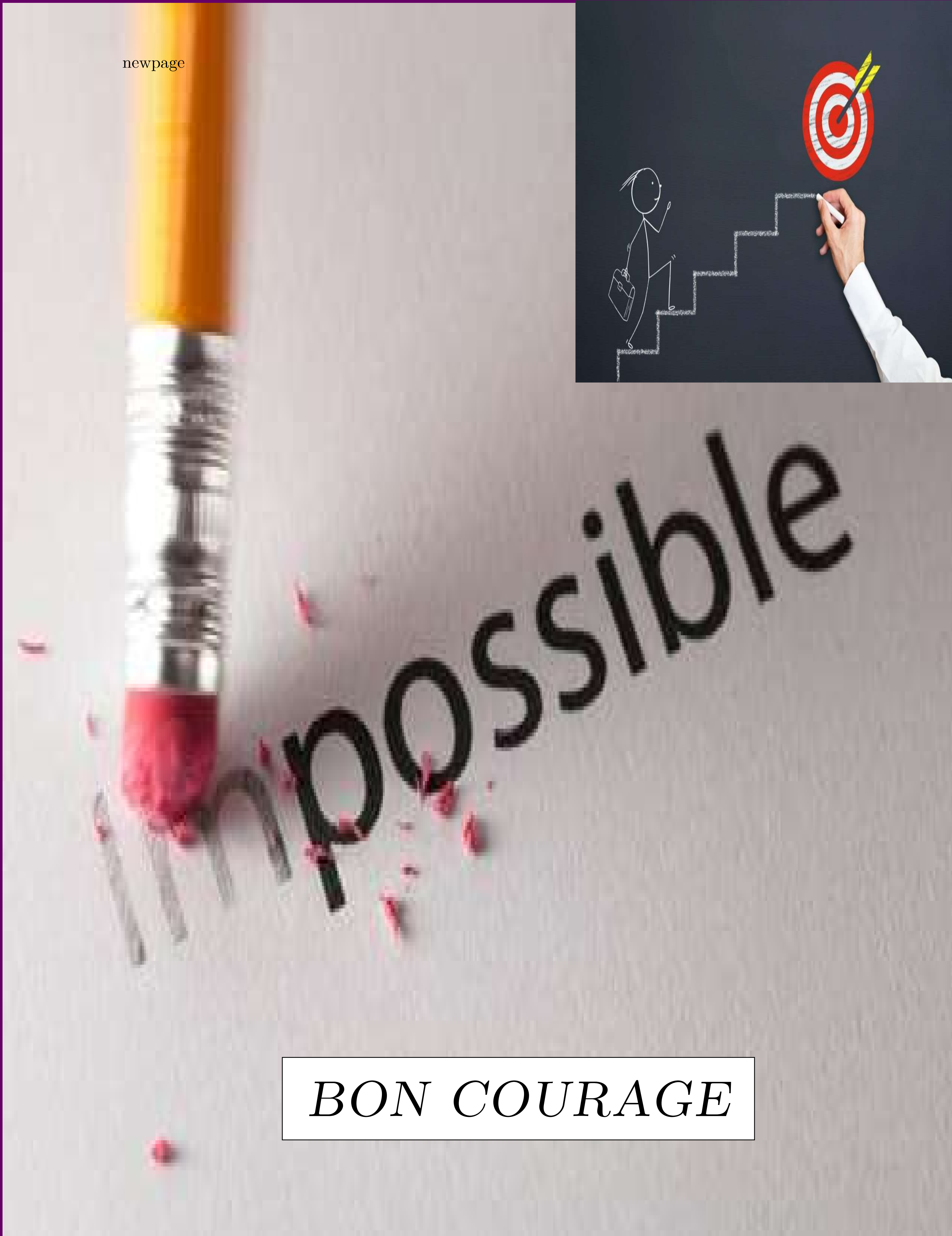
RÉDACTEURS

Liste des membres du groupe MTMgroup

Prénom	Nom	Direction Pédagogique
SAID	EL-FATMI	ERRACHIDIA
El Mustapha	Ait Youssef	AZILAL
Abderrahim	Lamrani	Tanger-Assilah
Lahcen	Lafdili	Guercif
HASSAN	MEGDOUL	Guelmim
ABDENNABI	ELKHALIFI	Tanger Assilah
JAOUAD	BELKADI	Taroudant
ZAKARIA	HAJHOUJI	Casablanca
YASSIR	NOUIHAL	MARRAKECH
LAHCEN	ATTOUALI	SIDI KACEM
ABDELKRIM-AMINE	IDRISSI	KÉNITRA
AHMED	SAOURA	ESSAOUIRA
HANANE	CHAHAT	TAZA
MERIEM	ELMKHENTER	SAFI
ISSAM	KHALOUFI	MEDIOUNA
YOUSSEF	HADDOUZ	MARRAKECH
SAID	MENNOU	Casablanca
Bouazza	LOUKILIA	Khouribga
NABIL	KCHIRI	SAFI
MOUNDIR	NICER	RHAMNA
MOHAMMED	LAKHAL	SIDI SLIMANE
SAID	ABDELLAOUI	TANGER-ASSILAH
MOHAMED	SOUHAIL	Casablanca
MOHAMED ABDESSAMAD	AZOUGA	Casablanca
OTMAN	ELHADDAOUI	KELAA DES SRAGHNA
ADIL	BENNAJI	AGADIR
Hamza	EL ANDALOUSSI	TANGER-ASILAH
BRAHIM	AIT IBBOUH	AZILAL
ayoub	Laslami	Casablanca
Zakaria	Berki	El Hajeb
Khalid	Zaou	chtouka aït baha
CHARAF_EDDINE	BOUHAFS	sidi benour
Mohamed	GAFSI	
Rachid	AOUISSI	TAOURIRT
ABDERRAHIM	HADDER	Casablanca
Mohamed	Ferjani	El youssoufia
Smail	Abouhouda	Casablanca
SAID	MANSOURI	MIDELT
ABDELAALY	TADOUMMANT	TATA
OULAID	EN-FEUR	MIDELT
Said	Ait Ouahmane	Marrakech
Ali	ZAAOUAT	
MOHAMED	EDDEBDI	TANGER
Rachid	Abou Israe	Sidi Kacem
Mounir	ezahery	Berrechid
Ayoub	sadki	
Aziz	ouali	marakech
Abdellah	El Aabbadi	Agadir
ELALAMI	ELAMRAOUI	nom

MTM GROUP

newpage



BON COURAGE

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة

المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ

ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ

ⴷ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵓⵏⵏⵓⵏⵏⵓⵏⵏⴰ

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2025

- الموضوع -

LLLLLLLLLLLLLLLLLLLL-LLLLL

NS - 24F

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

<u>CONSIGNES</u> :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ………..………..…(10 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes....…….(3.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique ………….......(3 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (10 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+e}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère **orthogonal** $(O;\vec{i},\vec{j})$

Partie I :

0.25 1- a) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad;\quad f(1-x)=f(x)$

0.25 b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0. 5 c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.5 d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0.5 2- a) Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R})\quad;\quad f'(x)=f(x)\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$

1 b) Donner les variations de f puis en déduire que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad;\quad 0<f(x)<\frac{1}{2}$$

0.5 3- Représenter graphiquement la courbe (Γ).

(On prendra $\|\vec{i}\|=1cm$, $\|\vec{j}\|=2cm$ et $\dfrac{1}{2\sqrt{e}}\cong 0.30$ et $\dfrac{1}{1+e}\cong 0.27$)

0.5 4- a) Montrer que: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

0.25 b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{1} f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

5- a) En effectuant le changement de variables : $t=e^x$, montrer que :

0.25 $$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dt}{t^2+e}$$

0.5 b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\left(\sqrt{e}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$

0.25 c) En déduire l'aire, en cm^2, du domaine plan délimité par (Γ), les droites d'équations respectives : $x=0$, $x=1$ et $y=0$

Partie II :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0\in\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$ et $(\forall n\in\mathbb{N})\quad;\quad u_{n+1}=f(u_n)$

0.5 1- En utilisant le résultat de la question I.2-a), montrer que :

$$(\forall x\in\mathbb{R})\;;\quad |f'(x)|\le f(x)$$

0.5 2- a) Montrer que : $\left(\forall x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right)\quad;\quad 0\le f'(x)<\dfrac{1}{2}$

0.25 b) Montrer que la fonction $g: x \mapsto g(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

0.5 c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que : $f(\alpha) = \alpha$

0.5 3- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 < u_n < \frac{1}{2}$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Partie III :

On considère la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad ; \quad S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 b) Montrer que : $\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(On pourra effectuer le changement de variables : $t = 1 - x$)

0.5 2- Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z:

$$(E_\alpha) \quad : \quad z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i\,2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2$

0.5 b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$

0.25 2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note par $M\left(z\right)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\dfrac{b}{a}=\lambda i$ avec $\lambda=\mathrm{Im}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\dfrac{1}{h}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{h}{b-a}=-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites $\left(OH\right)$ et $\left(AB\right)$ sont perpendiculaires.

0.5 b) Montrer que : $\dfrac{h-a}{b-a}=\dfrac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.

2- Soient $I\left(m\right)$ le milieu du segment $\left[OH\right]$ et $J\left(n\right)$ le milieu du segment $\left[HB\right]$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{n}{m-a}=-\lambda i$

0.5 b) En déduire que les droites $\left(OJ\right)$ et $\left(AI\right)$ sont perpendiculaires et que $OJ=\left|\lambda\right|AI$

0.25 c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)

Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.

0.25 d) Montrer que les droites $\left(IJ\right)$ et $\left(OA\right)$ sont perpendiculaires.

EXERCICE3 : (3 points)

Soient p un nombre premier impair et a un entier premier avec p

0.5 1- Montrer que $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ \left[p\right]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ \left[p\right]$

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $ax^2\equiv 1\ \left[p\right]$. Soit x_0 une solution de cette équation.

0.5 a) Montrer que : ${x_0}^{p-1}\equiv 1\ \left[p\right]$

0.25 b) En déduire que : $a^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ \left[p\right]$

3- Soit n un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que si p divise $2^{2n+1}-1$ alors $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ \left[p\right]$

0.5 b) En déduire que l'équation $\left(E\right)$: $11x+\left(2^{2n+1}-1\right)y=1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

4- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation $\left(F\right)$: $x^2+5x+2\equiv 0\ \left[11\right]$

0.25 a) Montrer que : $\left(F\right)\ \Leftrightarrow\ 2\left(2x+5\right)^2\equiv 1\ \left[11\right]$

0.5 b) En déduire que l'équation (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, et que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,.\right)$ est un espace vectoriel réel.

Soient la matrice $A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&1&-2\end{pmatrix}$ et l'ensemble $E=\left\{M(x)=I+xA\,/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

0.25 1- a) Vérifier que : $A^2=-2A$

0.25 b) En déduire que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $M(x)\times M(y)=M(x+y-2xy)$

0.25 2- a) Calculer $M\left(\dfrac{1}{2}\right)\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

0.25 b) En déduire que la matrice $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$ n'est pas inversible dans $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.25 3- Montrer que : $E-\left\{M\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$

(on pourra utiliser l'identité : $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-1}{2}\left(x+y-2xy-\dfrac{1}{2}\right)$)

1 4- Montrer que : $\left(E-\left\{M\left(\dfrac{1}{2}\right)\right\},\times\right)$ est un groupe commutatif.

5- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ M(x)\,T\,M(y)=M\left(x+y-\frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers E par : $\forall x\in\mathbb{R}$; $\varphi(x)=M\left(\dfrac{1-x}{2}\right)$

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T) et que $\varphi(\mathbb{R})=E$

0.25 b) En déduire que (E,T) est un groupe commutatif.

0.5 6- Montrer que $(E,T,\times)$ est un corps commutatif.

FIN

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2025

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

LLLLLLLLLLLLLLLLLL-LLLL

عناصر الإجابة

NR - 24F

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة أو المسلك

EXERCICE1 (10 points)			Éléments de réponses	Barème
Partie I	1-	a)	Démonstration de : $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad ; \quad f(1-x)=f(x)$	0.25
		b)	Interprétation graphique du résultat obtenu.	0.25
		c)	Calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis déduction de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	0.25x2
		d)	Interprétation des deux résultats obtenus.	0.25x2
	2-	a)	Démonstration de : $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad ; \quad f'(x)=f(x)\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$	0.5
		b)	Variations de f	0.5
			Déduction de : $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad ; \quad 0<f(x)<\dfrac{1}{2}$	0.5
	3-		Représentation graphique de la courbe (Γ)	0.5
	4-	a)	Démonstration de l'égalité : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$	0.5
		b)	Déduction de l'égalité : $\int_0^{1} f(x)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$	0.25
	5-	a)	Démonstration de l'égalité : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{dt}{t^2+e}$	0.25
		b)	Démonstration de l'égalité : $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(\arctan\left(\sqrt{e}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right)$	0.5
		c)	$\left(\int_0^1 \lvert f(x)\rvert dx\right)\times 2\text{cm}^2=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\times 2\text{cm}^2$	0.25
Partie II	1-		Démonstration de : $(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; \lvert f'(x)\rvert\le f(x)$	0.5
	2-	a)	Démonstration de : $\left(\forall x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]\right) \quad ; \quad 0\le f'(x)<\dfrac{1}{2}$	0.5
		b)	Démonstration de la stricte décroissance de la fonction g sur $\mathbb{R}$	0.25
		c)	L'existence et l'unicité de α	0.5
	3-	a)	Démonstration de : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad 0<u_n<\dfrac{1}{2}$	0.5
		b)	Démonstration de : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad ; \quad \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\le\dfrac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$	0.5
		c)	Démonstration par récurrence.	0.5

		d)	Déduction de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α	0.25
Partie III	1-	a)	Vérification de l'égalité.	0.25
		b)	Démonstration de l'égalité : $\int_0^1 x f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$	0.5
	2-		Convergence et détermination de la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$	0.25x2

EXERCICE2 (3.5 points)			Éléments de réponses	Barème
Partie I	1-	a)	Vérification de l'égalité.	0.25
		b)	Déduction des solutions de l'équation (E_α)	0.25x2
	2-		Vérification.	0.25
Partie II	1-	a)	Démonstration de l'égalité.	0.25
			Déduction de la perpendicularité des droites (OH)et(AB)	0.25
		b)	Démonstration de l'égalité.	0.25
			Déduction de l'alignement des points H, A et B	0.25
	2-	a)	Démonstration de l'égalité.	0.5
		b)	Déduction de $(OJ)\perp(AI)$ et $OJ = \lvert\lambda\rvert AI$	0.25x2
		c)	Cocyclicité des points K, I, H et J	0.25
		d)	Perpendicularité des droites (IJ)et(OA)	0.25

EXERCICE3 (3 points)		Éléments de réponses	Barème
1-		Démonstration de : $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \quad [p]$	0.5
2-	a)	Démonstration de la congruence.	0.5
	b)	Déduction.	0.25
3-	a)	Démonstration de l'implication.	0.5
	b)	Déduction.	0.5
4-	a)	Démonstration de l'équivalence.	0.25
	b)	Déduction.	0.5

EXERCICE4 (3.5 points)		Éléments de réponses	Barème
1-	a)	Vérification.	0.25
	b)	Déduction.	0.25
2-	a)	$M\left(\frac{1}{2}\right)\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=O$	0.25
	b)	Déduction.	0.25
3-		Démonstration de la stabilité de $E-\left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ dans $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$	0.25
4-		$\left(E-\left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\},\times\right)$ est un groupe commutatif.	1
5-	a)	φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers (E,T)	0.25
		$\varphi(\mathbb{R})=E$	0.25
	b)	Déduction.	0.25
6-		$(E,T,\times)$ est un corps commutatif :	0.5

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسلك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……………………(7.75 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ……………………(2.25 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes……….(3.5 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………………(3 pts)
- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (7.75 points)

Partie I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=[0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad f(x)=\frac{x^2\ln x}{x^2+1} \quad \text{si} \quad x\in]0;+\infty[$$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.25 1-a) Etudier la continuité de f à droite en 0

0.25x2 b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25x3 c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2- Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\varphi(x)=x^2+1+2\ln x$

0.5 a) Dresser le tableau de variations de φ

0.5 b) Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right[$ (On donne $\ln 2\simeq 0.7$ et $\ln 3\simeq 1.1$)

0.25 c) Montrer que : $f(\beta)=-\frac{\beta^2}{2}$

0.5 3-a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{x\varphi(x)}{(x^2+1)^2}$

0.5 b) Donner le tableau de variations de f

0.25 c) Montrer que $\frac{1}{\beta}$ est l'unique solution de l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ sur $]\beta;+\infty[$

0.5 d) Montrer que la droite d'équation $y=\beta x-\frac{1}{2}$ est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse $\frac{1}{\beta}$

0.5 4- Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion)

Partie II :

On pose $J=\left]\sqrt{3};2\right[$ et $\alpha=\frac{1}{\beta}$

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{e^{1+\frac{1}{x^2}}}$

0.25 1-a) Etudier les variations de g

0.25 b) Montrer que : $(\forall x\in J)$; $\sqrt{3}<g(x)<2$

(On donne $\sqrt{3}\simeq 1.73$, $e^{\frac{2}{3}}\simeq 1.95$ et $e^{\frac{5}{8}}\simeq 1.87$)

0.25 2-a) En utilisant le résultat de la question I.3-c), montrer que : $g(\alpha)=\alpha$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in J) \quad ; \quad |g'(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$

0.5 c) En déduire que : $(\forall x \in J) \quad ; \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}|x - \alpha|$

3- On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = \frac{7}{4} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N} \quad , \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad x_n \in J$

0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad ; \quad |x_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n |x_0 - \alpha|$

0.25 c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α .

EXERCICE2 : (2.25 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $(\forall n \geq 2) \quad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

0.25 a) Montrer que pour tout entier $k \in \{1,2,...,n-1\}$ et pour tout réel $x \in \left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$,

on a : $\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln(x) \leq \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

0.25 b) En déduire que : $\forall k \in \{1,2,...,n-1\}$; $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

0.5 2- a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)$; $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \geq 2)$; $u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

0.5 c) Montrer que : $(\forall n \geq 2) \quad ; \quad -1 + \frac{1}{n} \leq u_n \leq -1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)$

0.25 d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Soit $\theta \in [0, \pi[$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) d'inconnue z

$$(E_\theta) : z^2 + (1-i)e^{i\theta}z - ie^{i2\theta} = 0$$

0.25 1- a) Vérifier que : $(E_\theta) \Leftrightarrow \left(2z+(1-i)e^{i\theta}\right)^2 = \left((1+i)e^{i\theta}\right)^2$

0.5 b) En déduire les deux solutions z_1 et z_2 de l'équation (E_θ) avec $\operatorname{Im}(z_1) \leq 0$

0.25 2- a) Montrer que : $\dfrac{z_1+1}{z_2+i} = -\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

0.25 b) En déduire la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{z_1+iz_2}{z_2+i}$

<u>Partie II</u> :

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $a=e^{i\theta}$, $b=(1+i)e^{i\theta}$ et $c=b-a$

Soient m un nombre **réel** de $]0;1[$, R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et le point Q d'affixe $q = me^{i\theta}$

0.25 1- a) Déterminer l'affixe p du point P l'image du point Q par la rotation R

0.25 b) Vérifier que : $R(A)=C$

2- Soit H le point d'affixe $h = \dfrac{m}{m-i}e^{i\theta}$

0.5 a) Montrer que : $\dfrac{p-a}{h} = \dfrac{m^2+1}{m}i$ et $\dfrac{h-a}{p-a} = \dfrac{1}{m^2+1}$

0.25 b) En déduire que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AP)

0.5 c) Montrer que : $\dfrac{b-h}{q-h} = \dfrac{1}{m}i$

0.25 d) En déduire que les droites (QH) et (HB) sont perpendiculaires.

0.25 e) Montrer que les points A, Q, H et B sont cocycliques.

<u>EXERCICE4</u> : (3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $y = \dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{d}$ où a,b,c et d sont des entiers naturels non nuls vérifiant : $a \wedge b = c \wedge d = 1$

1- On suppose que l'équation (E) admet une solution (x_0, y_0)

0.5 a) Montrer que : d divise bc

0.5 b) En déduire que : d divise b

2- On suppose que d divise b et on pose : $b = nd$ où n est un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que qu'il existe $(u,v)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $dnu - av = 1$

0.75 b) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S = \{(-vcn+bk\ ;\ -ucn+ak)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

0.75 | 3- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (F): $y=\dfrac{3}{2975}x-\dfrac{2}{119}$

(On donne : $2975=119\times 25$)

<u>EXERCICE5</u> : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On munit l'ensemble $E=\{x+yi\ /\ x\in\mathbb{Z}\ et\ y\in\mathbb{Z}\}$ par la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{Z}^4$; $(x+yi)*(x'+y'i)=\left(x+(-1)^y x'\right)+(y+y')i$

<u>Partie I</u> :

0.25 | 1- a) Vérifier que : $(1-i)*(3+2i)=-2+i$

0.25 | b) Montrer que la loi $*$ n'est pas commutative dans E

0.5 | 2- Montrer que la loi $*$ est associative dans E

0.25 | 3- Montrer que 0 est l'élément neutre pour la loi $*$ dans E

0.25 | 4- a) Vérifier que $\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2$; $(x+yi)*\left((-1)^{(y+1)}x-yi\right)=0$

0.25 | b) Montrer que $(E,*)$ est un groupe non commutatif.

<u>Partie II</u> :

Soient les deux ensembles $F=\{x+2yi\ /\ x\in\mathbb{Z}\text{ et }y\in\mathbb{Z}\}$ et

$$G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}1&x&y\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ /\ x\in\mathbb{Z}\text{ et }y\in\mathbb{Z}\right\}$$

0.5 | 1- a) Montrer que F est un sous-groupe de $(E,*)$

0.25 | b) Montrer que la loi $*$ est commutative dans F

2- Soit φ l'application définie de F vers $M_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2;\ \varphi(x+2yi)=M(x,y)$$

0.5 | a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(F,*)$ vers $(M_3(\mathbb{R}),\times)$

0.25 | b) Montrer que $\varphi(F)=G$

0.25 | c) En déduire que $(G,\times)$ est un groupe commutatif.

FIN