

BACCALAURÉAT INTERNATIONAL OPTION FRANÇAIS SCIENCES MATHÉMATIQUES

EXERCICES ET PROBLÈMES CORRIGÉS

Auteur : Omar Elaidi
Conforme au programme
2020

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

**BACCALAURÉAT
INTERNATIONAL
SCIENCES MATHÉMATIQUES
OPTION FRANÇAIS**

**EXERCICES ET PROBLÈMES
CORRIGÉS**

Omar Elaidi

juillet 2020

Préface

Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes.

André Weil

Cet ouvrage de référence couvre, en un seul volume, l'ensemble du programme de mathématiques de la terminale sciences mathématiques option français , peut éventuellement intéresser les élèves des classes préparatoires. Il est composé de dix chapitres et une partie problèmes de synthèse.

Sa présentation permet à l'élève de conforter ses acquis. Il a été conçu pour aider les étudiants à bien réussir leur baccalauréat . Il leur sera utile pour bien se préparer , et leur servira de support durant toute l'année .

Ce livre présente des concepts de base des mathématiques, sous forme d'exercices et de problèmes à résoudre , contient des éléments fondamentaux de mathématiques pour que les élèves puissent évaluer leur capacité à résoudre un problème et à contrôler la justesse de leurs raisonnements.

Le présent ouvrage contient tous les sujets qui doivent être abordés dans les cours de la terminale sciences mathématiques et peut être aussi considéré comme un point reliant les différentes études secondaires supérieures. J'ai marqué des sections dans la table des matières, afin d'offrir à l'élève ou à l'enseignant un choix de thèmes appropriés. .

Je voudrai conclure cette préface par des remerciements à l'attention de mes élèves et étudiants par leur questions et remarques pertinentes , à l'attention des professeurs Mohammed El hadeg et Badr Tedghoui pour la relecture de cet ouvrage.

L'auteur

Table des matières

Table des matière	4
1 Continuité	9
1.1 Calcul de limites rappel.	9
1.2 Continuité	17
1.3 Théorème des valeurs intermédiaires	25
1.4 Fonctions réciproques.	33
2 Dérivabilité	55
2.1 Dérivabilité	55
2.2 Égalités-inégalités	67
2.3 Rolle-accroissements finis	74
3 Suites numériques	91
3.1 Convergence de suite	91
3.2 Suites adjacentes	111
3.3 Suites implicites	114
4 Nombres complexes	125
4.1 Des calculs	125
4.2 Forme trigonométrique	128
4.3 Ensembles de points	132

4.4	Équations	134
4.5	Forme exponentielle	144
4.6	Transformations et géométrie	152
5	Fonction logarithme	175
5.1	Des calculs	175
5.2	Des inégalités	180
5.3	Études de fonctions	183
5.4	Famille de fonctions	186
5.5	Suites - Fonctions	201
6	Fonction exponentielle	233
6.1	Des calculs	233
6.2	Fonctions-Famille de fonctions-suites	242
7	Calcul intégral	285
7.1	Primitives-calcul intégral	285
7.2	Suites et intégral	301
7.3	Fonctions définies par une intégrale	316
8	Arithmétiques	355
8.1	PGCD -PPCM-Algorithmme d'Euclide-Théorème de Bezout.	355
8.2	Congruence-Fermat-Gauss	372
9	Structures algébriques	397
9.1	Loi de composition interne-groupe-homomorphisme.	397
9.2	Calcul matriciel	420
9.3	Espaces vectoriels	430
10	Problèmes de synthèse analyse .	453

1 Continuité

1.1 Calcul de limites rappel.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - 2 - x}{x^2}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2+\sqrt{x})\sqrt{2-x}-3}{x^2-1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - \sqrt{x^3}} - x\sqrt{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}-3}}}{\sqrt{x-1}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}-3}}}{\sqrt{x-1}}$$

Correction

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(\sqrt{x} - 1)^2}{-2(x-1)} \times (\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{2(\sqrt{x} + 1)} \times (\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1}) = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1} - x - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{1}{(\sqrt{x+1} + 1)} \right)^2 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 + \sqrt{x})\sqrt{2-x} - 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2-x} + \sqrt{2x-x^2} - 3}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{2-x} - 2) + (\sqrt{2x-x^2} - 1)}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{2-x} - 2)}{x^2 - 1} + \frac{(\sqrt{2x-x^2} - 1)}{x^2 - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-x)}{(x^2 - 1)(\sqrt{2-x} + 1)} + \frac{2x - x^2 - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{2x-x^2} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2-x} + 1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x-x^2} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{(x+1)(\sqrt{2-x} + 1)} - \frac{(x-1)}{(x+1)(\sqrt{2x-x^2} + 1)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}}-3}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}-9}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}}+3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1+4(\sqrt{2x+2\sqrt{x}}-2)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{1}{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}}+3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{4(2x+2\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+2)} \right) \times \frac{1}{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}}+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{8(x+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+2)} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} + \frac{8(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+2)} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+3}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{x}+1 + \frac{8(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+2)} \right) \times \frac{1}{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}+3}} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{2x+2\sqrt{x}}}-3}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{1+4\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{2}{x\sqrt{x}}}-\frac{3}{\sqrt{x}}}} \right)}{\sqrt{x} \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{1+4\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{2}{x\sqrt{x}}}-\frac{3}{\sqrt{x}}} \right)}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = 1
\end{aligned}$$

Exercice 2

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sin x}{\sqrt{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(x-E(x)))}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} x E\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n+1}}$$

Correction

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \left(\frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)} + 1 \right) = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 2)} + 1 \right) = \frac{1}{2}$$

(b) On sait que pour tout réel x on a : $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc pour tout $x \geq 0$,
 $0 \leq \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$.

Alors par le théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$

(c)

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

donc :

$$\frac{\sin(\pi(x - E(x)))}{x} = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{\sin(\pi(x+1))}{x} = -\frac{\sin(\pi x)}{x} & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi(x - E(x)))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(\pi(x - E(x)))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sin(\pi x)}{x} = -\pi$$

(d) Partant de pour tout x réel non nul on a :

$$x - \frac{1}{x} - 1 < E\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq x - \frac{1}{x}$$

en multipliant les membres de ces inégalités par x en distinguant les cas x négatif

ou positif, on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1$$

(e)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(f)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{n+1}} (x - 1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 3

$$(a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi \cos x)}{x}$$

Correction

(a) Technique classique, on fait un changement de variable en posant $h = x - \frac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h + \frac{\pi}{4}) - \sin(h + \frac{\pi}{4})}{1 - \tan(h + \frac{\pi}{4})}$$

avec :

$$\begin{cases} \cos(h + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(h) - \sin(h)) \\ \sin(h + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(h) + \sin(h)) \\ 1 - \tan(h + \frac{\pi}{4}) = \frac{-2 \tan(h)}{1 - \tan(h)} \end{cases}$$

on aura :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin(h)}{2 \tan(h)} (1 - \tan(h)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \frac{\sin(h)}{h}}{2 \frac{\tan(h)}{h}} (1 - \tan(h)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Une autre façon de voir cette limite juste remarquer que :

$$\frac{\cos(x) - \sin(x)}{1 - \tan(x)} = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x)}} = \cos(x)$$

d'où le résultat

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi \cos(x))}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi \cos(x) - \pi)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi \cos(x) - \pi)}{\pi(\cos(x) - 1)} \times \frac{\pi(\cos(x) - 1)}{x^2} \\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Attention !

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Exercice 4

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}-n}{x-1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+x^2)\dots(1+x^n)-1}{x}$$

Correction

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^{n-1} - 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) \dots + (1 + x + \dots + x^{n-2}))}{x - 1} \\
&= 1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{(n - 1)n}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1})(1 + x^n) - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1}) - 1) + (1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1})x^n}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1}) - 1)}{x} + ((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1}))x^{n-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-2}) - 1)}{x} \\
&\quad + ((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-2}))x^{n-2} + ((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1}))x^{n-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + (1 + x)x + \dots + ((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-2}))x^{n-2} \\
&\quad + ((1 + x)(1 + x^2) \dots (1 + x^{n-1}))x^{n-1} = 1
\end{aligned}$$

Exercice 5

n un entier naturel ($n \geq 2$), on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ par :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}) ; \quad f_n(x) = \frac{(1 - x^2)^n}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^n)}$$

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{n!}$.

2.(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1 - x^2)}{(1 - x^n)}$ dans les deux cas n pair et n impair.

(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x)$.

Correction

1. Montrons par récurrence que :

$$(\forall n \geq 2) \quad ; \quad \text{on a } \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{n!}$$

Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^2)^2}{(1-x)(1-x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x^2)}{(1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) = 2 = \frac{2^2}{2!} \end{aligned}$$

ce qui est vrai . Supposons que cette propriété est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons la pour $n+1$. Il faut juste remarquer que pour $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f_n(x) \times \frac{(1-x^2)}{(1-x^{n+1})} \\ &= f_n(x) \times \frac{1+x}{1+x+x^2+\dots+x^n} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f_{n+1}(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) \times \frac{1+x}{1+x+x^2+\dots+x^n} \\ &= \frac{2^n}{n!} \times \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

en conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{n!}$$

2. (a)

Pour n impair :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{1 - x^n} = 0$$

Pour n pair : $n = 2p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) :

$$1 + x^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^2)^{p-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x^2}$$

D'où :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{1 - x^n} = \frac{1}{p} = \frac{2}{n}$$

(b)

Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{(1 - x^2)^n}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^{n-1})(1 - x^n)} \\ &= \frac{(1 - x^2)^{n-2}}{(1 - x)(1 - x^2) \dots (1 - x^{n-2})} \times \frac{(1 - x^2)}{(1 - x^{n-1})} \times \frac{(1 - x^2)}{(1 - x^n)} \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = 0$$

1.2 Continuité

Exercice 6

On considère la fonction f définie comme suit :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(1-x)\sqrt{1+2x-1}}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

(a) calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x-1}-x}{x^2}$.

(b) En déduire que f est continue en 0.

Correction

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1+2x} + x + 1} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)\sqrt{1+2x} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - x\sqrt{1+2x} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - x - 1}{x^2} + \frac{x - x\sqrt{1+2x}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - x - 1}{x^2} + \frac{-2}{1 + \sqrt{1+2x}} \\ &= -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} = f(0)\end{aligned}$$

donc f est continue en 0.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ? si oui le déterminer .

Correction

Soit f la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}}$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+x})}{x - 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f}(x) = f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \tilde{f}(0) = -2.$$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) = \left(1 - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sin(x)$$

(a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) En déduire que f possède un prolongement par continuité en 0 à définir.

Correction

(a) Pour tout réel non nul on :

$$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

et donc :

$$\begin{cases} 1 - x < xE\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 & \text{si } x > 0 \\ 1 \leq xE\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - E\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sin x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - xE\left(\frac{1}{x}\right)\right) \frac{\sin x}{x} \\ &= -1. \end{aligned}$$

On peut donc définir un prolongement par continuité en 0 de f par la fonction g définie comme suit :

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0$$

$$g(0) = -1$$

Exercice 9

On considère la fonction h définie comme suit :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} & \text{si } x < 1 \\ h(1) = c \\ h(x) = \frac{x\sqrt{x-1}}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Trouver les réels a, b et c pour que la fonction h soit continue en 1.

Correction

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2-1} & \text{si } x < 1 \\ h(1) = c \\ h(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pour que h soit continue en 1 il faut et il suffit que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1)$$

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x})^3-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2}{1+\sqrt{x}} \\ &= \frac{3}{2} = c \end{aligned}$$

Regardons maintenant :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+ax+b}{x^2-1}$$

si $1+a+b \neq 0$ cette limite sera infinie , donc h ne sera pas continue en 1 .donc pour que h soit continue en 1 il est nécessaire que : $b = -1 - a$.

d'ou dans ce cas :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+ax+b}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+ax-1-a}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1+a)}{x+1} = \frac{a+2}{2} \end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$$

On aura :

$$\frac{a+2}{2} = \frac{3}{2}$$

et donc :

$$a = 1 \quad \text{et par suite } b = -2$$

Exercice 10

Soit f la fonction définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + E(x)$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Correction

Soit k un entier relatif, pour $x \in]k, k+1[$ on a : $f(x) = x + k$.

Donc f est continue sur $]k, k+1[$ puisqu'elle est restriction de fonction polynômiale.

Étudions la continuité de f en $k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} x + k = 2k$$

et

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} x + k - 1 = 2k - 1$$

donc f n'est pas continue en k .

En conclusion f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 11

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^* \right) ; \quad g(x) = x E \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

1.(a) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $g(x) = 0$, en déduire $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $g(x) = x$.

(c) La fonction g est-elle continue en 1 ?

2. Soit k un entier naturel ($k \geq 2$).

(a) Donner l'expression de $g(x)$ pour $x \in \left] \frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2} \right[$.

(b) Etudier la continuité de g en k .

Correction

1.(a) i.

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \iff \left(x > 0 \text{ et } x E \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0 \right) \\ &\iff E \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 0 \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{x}} \in]0, 1[\\ &\iff x \in]1, +\infty[. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

ii.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= x \iff xE\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x \\
 &\iff E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \quad (\text{puisque } x > 0) \\
 &\iff \frac{1}{\sqrt{x}} \in [1, 2[\\
 &\iff x \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right]
 \end{aligned}$$

iii. On a d'après i)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$$

et d'après ii)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

la fonction g est clairement n'est pas continue en 1.

(b) k entier naturel ($k \geq 2$).

i.

$$x \in \left] \frac{1}{k^2}, \frac{1}{(k-1)^2} \right[\iff \frac{1}{\sqrt{x}} \in]k-1, k[$$

et donc

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = k-1$$

par suite :

$$g(x) = x(k-1)$$

ii. De i)

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{k^2}\right)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{k^2}\right)^+} x(k-1) = \frac{(k-1)}{k^2}$$

on a aussi :

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{k^2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{k^2}\right)^-} xk = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$$

donc g n'est pas continue en $\frac{1}{k^2}$.

1.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 12

α un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = x^4 + x^2 + \alpha x - 2$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1, 1]$.

Correction

La fonction f étant continue sur $[-1, 1]$ comme restriction de fonction polynômiale.
 $f(-1) = -\alpha < 0$ et $f(1) = \alpha > 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1, 1]$.

Exercice 13

Montrer que l'équation : $\cos(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction

On pose pour $x \neq -1$; $h(x) = \cos(x) - \frac{2}{(x+1)^2}$.

$h(2\pi) = 1 - \frac{2}{(2\pi+1)^2} > 0$ et $h(0) = -1$.

la fonction h est continue sur $[0, 2\pi]$ comme somme de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaire l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, 2\pi]$ donc dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14

f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Correction

f fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$, donc $(\forall x \in [a, b]) ; a \leq f(x) \leq b$.

On considère alors la fonction g définie sur $[a, b]$ par :

$$(\forall x \in [a, b]) ; g(x) = f(x) - x$$

g est continue sur $[a, b]$ comme somme de deux fonctions continues sur $[a, b]$.

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0 \quad (\text{car } (\forall x \in [a, b]) ; a \leq f(x) \leq b).$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation : $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$, et donc l'équation : $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Exercice 15

f une fonction continue sur $[0, 1]$, montrer que :

$$(\exists c \in]0, 1[) ; f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$$

Correction

On définit sur $]0, 1[$ la fonction h par :

$$(\forall x \in]0, 1[) ; h(x) = f(x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

La fonction h est continue sur $]0, 1[$ (somme de fonctions continues).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$ on peut affirmer que : $h(]0, 1[) = \mathbb{R}$. $0 \in \mathbb{R}$
d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists c \in]0, 1[) , \text{ tel que } h(c) = 0$

c'est-à-dire : $(\exists c \in]0, 1[) , \text{ tel que } f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$

Exercice 17

f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que $f(a) < 0$, montrer que :

$$(\exists c \in]a, b[) ; f(c) = \frac{a-c}{b-c}$$

Correction

On définit sur $[a, b[$ la fonction h par :

$$(\forall x \in [a, b[) ; h(x) = f(x) - \frac{a-x}{b-x}$$

La fonction h est continue sur $[a, b[$ (somme de fonctions continues).

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = h(a) = f(a) < 0.$$

Et

$$\lim_{x \rightarrow b^-} h(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{a-x}{b-x} = -\infty .$$

D'où $[h(a), +\infty[\subset h([a, b[)$, donc $0 \in h([a, b[)$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists c \in]a, b[) , \text{ tel que } h(c) = 0$ c'est-à-dire $(\exists c \in]a, b[) , \text{ tel que } f(c) = \frac{a-c}{b-c}$

Exercice 18

f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f(a) < g(a)$ et $f(b) > g(b)$.

Montrer que :

$$(\exists c \in]a, b[) ; f(c) = g(c)$$

Correction

On définit sur $[a, b]$ la fonction h par :

$$(\forall x \in [a, b]) ; h(x) = f(x) - g(x)$$

La fonction h est continue sur $[a, b]$ (somme de fonctions continues).

$h(a) = f(a) - g(a) < 0$ et $h(b) = f(b) - g(b) > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$(\exists c \in]a, b[)$, tel que $h(c) = 0$ c'est-à-dire $:(\exists c \in]a, b[)$, tel que $f(c) = g(c)$

Exercice 19

1. g une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $(\forall x \in [a, b]) ; g(x) \neq 0$ montrer que :

$$((\forall x \in [a, b]) ; g(x) > 0) \text{ ou } ((\forall x \in [a, b]) ; g(x) < 0)$$

2. f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $(\forall x \in [a, b]) ; f(x) \neq x$. Montrer que l'équation $f \circ f(x) = x$ n'admet pas de solutions dans $[a, b]$

Correction

1. Raisonnons par absurde , supposons qu'il existe x_1 et x_2 dans $[a, b]$ tels que :

$g(x_1) > 0$ et $g(x_2) < 0$. Comme g continue sur $[a, b]$ d'après le théorème des

valeurs intermédiaires il existe $c \in [a, b]$ tel que : $g(c) = 0$ ce qui est absurde .

$$((\forall x \in [a, b]); g(x) > 0) \text{ ou } ((\forall x \in [a, b]); g(x) < 0)$$

2. f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $(\forall x \in [a, b]); f(x) \neq x$. Montrons que l'équation : $f \circ f(x) = x$ n'admet pas de solutions dans $[a, b]$

On pose :

$$g(x) = f(x) - x$$

la fonction g est continue sur $[a, b]$ et $(\forall x \in [a, b]) \quad g(x) \neq 0$ d'après la question précédente on a :

$$((\forall x \in [a, b]); g(x) > 0) \text{ ou } ((\forall x \in [a, b]); g(x) < 0)$$

Supposons par exemple que $((\forall x \in [a, b]); g(x) > 0)$ (même raisonnement si on suppose que $((\forall x \in [a, b]); g(x) < 0)$).

$$(\forall x \in [a, b]); \quad g(x) > 0 \Leftrightarrow (\forall x \in [a, b]); \quad f(x) > x$$

donc :

$$(\forall x \in [a, b]) ; f \circ f(x) > f(x)$$

Si $f \circ f(x) = x$ admet une solution α dans $[a, b]$ càd : $f \circ f(\alpha) = \alpha$ on aura :

$$f(\alpha) < f \circ f(\alpha) = \alpha$$

et donc :

$$f(\alpha) < \alpha$$

ce qui est absurde d'où le résultat.

Exercice 20

f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et n un entier naturel ($n \geq 2$).

Montrer que l'équation : $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$

Correction Un résultat utile :

Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels tels que $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$ alors ces nombres ne peuvent pas être tous strictement positifs et ne peuvent pas être tous négatifs.

C'est-à-dire : $(\exists i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \ i < j \text{ tels que } a_i a_j \leq 0)$.

Revenons à notre exercice.

On définit sur $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ la fonction g par :

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$$

cette fonction est bien continue sur $\left[0, \frac{n-1}{n}\right]$. de plus :

$$\begin{aligned} & g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= f(0) - f\left(0 + \frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) \\ &= f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1) \\ &= f(0) - f(1) = 0 \end{aligned}$$

D'après le résultat ci-dessus, $\exists i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \ i < j$, tels que $g\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{j}{n}\right) \leq 0$, et donc par le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\left[\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right]$.

D'où le résultat.

Remarque :

Ce résultat n'est plus vrai si on remplace n par $\sqrt{2}$ par exemple.

Exercice 21

f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) \neq f(1)$ montrer que :

$$(\exists c \in]0, 1[) ; 2 f(c) = f(0) + f(1)$$

Correction

f une fonction continue $[0, 1]$ alors : $f([0, 1]) = [m, M]$ avec $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$. Donc $(\forall x \in [m, M])$ on a : $m \leq f(x) \leq M$.

Le nombre $\lambda = \frac{f(0) + f(1)}{2} \in [m, M]$ (juste faire des encadrements) et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [0, 1]$ tel que : $f(c) = \lambda$.

D'où le résultat.

Exercice 22

f une fonction continue positive sur $[0, +\infty[$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha < 1$.

Montrer que : $(\exists \beta \in [0, +\infty[) , f(\beta) = \beta$.

Correction

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $(\forall x \geq 0) ; g(x) = f(x) - x$.

La fonction g est clairement continue sur $[0, +\infty[$, et $g(0) = f(0) \geq 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right) = -\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right) = \alpha - 1 < 0$).

Donc $]-\infty, f(0)] \subset g([0, +\infty[)$, et $0 \in g([0, +\infty[)$. D'où par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $\beta \in [0, +\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$.

c'est-à-dire : $f(\beta) = \beta$.

Exercice 23

Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$(\forall x \geq 0) ; f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

(a) Étudier les variations de f_n , et en déduire le signe de $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right)$.

(b) montrer que :

$$\left(\exists \beta \in \left]\frac{2n}{n+1}, +\infty\right[\right) ; f_n(\beta) = 0$$

Correction

(a) Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$(\forall x \geq 0) ; f_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

f_n dérivable sur $]0, +\infty[$ (car restriction de fonction polynomiale) et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x > 0) ; f'_n(x) &= (n+1)x^n - 2nx^{n-1} \\ &= (n+1)x^{n-1} \left(x - \frac{2n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

donc la fonction f_n est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{2n}{n+1}, +\infty\right[$ qu'on peut résumer dans le tableau de variation suivant

x	0	$\frac{2n}{n+1}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		— 0 +	
$f_n(x)$			

Puisque f_n est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{2n}{n+1}\right]$ et que $1 < \frac{2n}{n+1}$ (car $n \geq 2$) alors $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < f_n(1) = 0$.

(b) Comme f_n continue sur $\left] \frac{2n}{n+1}, +\infty \right[$ et que :
 $f_n \left(\left] \frac{2n}{n+1}, +\infty \right[\right) = \left] f_n \left(\frac{2n}{n+1} \right), +\infty \right[$ et $0 \in \left] f_n \left(\frac{2n}{n+1} \right), +\infty \right[$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires on peut affirmer que :

$$\left(\exists \beta \in \left] \frac{2n}{n+1}, +\infty \right[\right) \text{ tel que } f_n(\beta) = 0.$$

1.4 Fonctions réciproques.

Exercice 24

Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt[4]{x^4 + 1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} + \sqrt{x + 2} - 3}{x - 2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2n]{x+1} + \sqrt[2n]{x}}{\sqrt[n]{x^2+1}}$

Correction

(a) Je vais détailler la solution de cette limite pour voir les étapes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{x})^3}{x^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x}}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt[4]{x^4 + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - x \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^4}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 - \sqrt[4]{1 + \frac{1}{x^4}} \right) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} + \sqrt{x + 2} - 4}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x^2 + 4} - 2) + (\sqrt{x + 2} - 2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)}{(x - 2)(\sqrt[3]{x^2 + 4}^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4)} + \frac{(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(\sqrt[3]{x^2 + 4}^2 + 2\sqrt[3]{x^2 + 4} + 4)} + \frac{1}{(\sqrt{x + 2} + 2)} \\
&= \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2n]{x+1} + \sqrt[2n]{x}}{\sqrt[n]{x^2+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[2n]{x} \left(\sqrt[2n]{1+\frac{1}{x}} + 1 \right)}{\sqrt[n]{x^2} \sqrt[n]{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt[2n]{x}}{x^2}} \frac{\left(\sqrt[2n]{1+\frac{1}{x}} + 1 \right)}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{x^{2n-1}}} \frac{\left(\sqrt[2n]{1+\frac{1}{x}} + 1 \right)}{\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^2}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Exercice 25*Montrer que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad ; \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Correction

Soit $x > 0$, il existe un unique $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que :

$$x = \tan(\theta).$$

donc :

$$\begin{aligned}
\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \arctan(\tan(\theta)) + \arctan\left(\frac{1}{\tan(\theta)}\right) \\
&= \arctan(\tan(\theta)) + \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\
&= \theta + \frac{\pi}{2} - \theta \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

car : $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{\pi}{2} - \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour $x < 0$ on a $-x > 0$ et donc :

$$\arctan(-x) + \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

comme la fonction $x \rightarrow \arctan(x)$ est impaire on a alors :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Remarque :

Il est important de retenir ce résultat , car il est beaucoup utilisable niveau calcul de limites faisant intervenir la fonction arctangente.

Exercice 26

Calculer les limites suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+1}-1)}{x^2}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2+1} - x \arctan(x)$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan(2x) - \arctan(x))$

Correction

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+1}-1)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+1}-1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\sqrt{x^2+1}-1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+1}+1)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)} \times \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + 1} - x \arctan(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + 1} - x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \sqrt{x^2 + 1} - x \frac{\pi}{2} + x \arctan \left(\frac{1}{x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} (\sqrt{x^2 + 1} - x) + \frac{\arctan \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} + x)} + \frac{\arctan \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\arctan(2x) - \arctan(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\arctan \left(\frac{1}{x} \right) - \arctan \left(\frac{1}{2x} \right) \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan \left(\frac{1}{x} \right)}{\left(\frac{1}{x} \right)} - \frac{1}{2} \frac{\arctan \left(\frac{1}{2x} \right)}{\left(\frac{1}{2x} \right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

(a) $\sqrt[3]{x + \sqrt{x + 1}} = \sqrt{x}$

$$(b) \sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$$

$$(c) \arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

$$(d) \arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

Correction

(a) Avant tout il faut préciser le domaine de définition D_1 de l'équation :

$$\sqrt[3]{x - \sqrt{x} + 1} = \sqrt{x}$$

$$x \in D_1 \Leftrightarrow (x \geq 0) \text{ et } (x - \sqrt{x} + 1 \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 0) \text{ et } \left((\sqrt{x} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \right) \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x - \sqrt{x} + 1} &= \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = x\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

(b) D_2 domaine de définition de l'équation :

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2} \text{ est } D_2 = [-1, 1].$$

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} - 4\sqrt[3]{1-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{(x+1)} \right)^2 + \left(2\sqrt[3]{(1-x)} \right)^2 - 2 \times 2\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{(x+1)} - 2\sqrt[3]{(1-x)} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)} = 2\sqrt[3]{(1-x)}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 8(1-x)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{9}$$

(c) De l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ on a forcément $x > 0$.

Il est à rappeler que :

$$a = b \implies \tan(a) = \tan(b)$$

mais la réciproque est fautive sauf si : $|a - b| < \pi$.

Ici pour $x > 0$, on $\arctan(2x) + \arctan(x) \in]0, \pi[$, d'où :

$$\begin{aligned} \arctan(2x) + \arctan(x) &= \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan(\arctan(2x) + \arctan(x)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \left(x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}. \end{aligned}$$

(d) Pour l'équation $\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$, on raisonne comme pour l'équation précédente en tenant compte du fait que $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sqrt{3} - 2$ (à justifier). on aura alors :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3} + 1)x}{1 - \sqrt{3}x^2} = -\sqrt{3} - 2$$

En résolvant cet équation on trouve $x = 1$ ou $x = -\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+3}\right)$ comme $x > 0$ alors $x = 1$.

Exercice 28

Pour $x \in \mathbb{R}^*$; simplifier l'expression suivante :

$$\arctan\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Correction

Avant tout voici quelques Indispensables formules pour simplifier ce genre d'expressions

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
\cos(x) &= \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
\sin(x) &= \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
\sin(x) &= 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \rightarrow \arctan\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est impaire, il suffit de simplifier l'expression $\arctan\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$ pour $x > 0$.

Pour $x > 0$, il existe un unique $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tel que : $x = \tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \arctan(x)$. Et donc :

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) &= \arctan\left(\frac{1}{2}\left(\tan(\theta) - \frac{1}{\tan(\theta)}\right)\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\tan^2(\theta) - 1}{2 \tan(\theta)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{2 \cos(\theta) \sin(\theta)}\right) \\
&= \arctan\left(-\frac{1}{\tan(2\theta)}\right) \\
&= -\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right)
\end{aligned}$$

comme : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ donc $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\theta < \frac{\pi}{2}$, par suite :

$$\begin{aligned}
-\arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right) &= -\frac{\pi}{2} + 2\theta \\
&= -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(x)
\end{aligned}$$

Pour $x < 0$ donc $-x > 0$ d'où

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\left(-x - \left(\frac{1}{-x}\right)\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan(-x)$$

soit :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 2\arctan(x)$$

En conclusion :

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2\arctan(x) & \text{si } x > 0. \\ \frac{\pi}{2} + 2\arctan(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 29

Vérifier l'égalité suivante :

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

Correction

Vérifions l'égalité suivante :

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \in]0, \pi[$ et $\arctan\left(\frac{4}{3}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc on a le droit de dire :

$$2\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{1 - \tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 30

1.(a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(b) Dédurre l'expression de :

$$\sin(\arctan(x))$$

2. Soient p , q et r trois réels positifs tels que : $1 + p^2 = qr$.

(a) Montrer que :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p+r}\right) + \arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)\right)$$

(b) Dédurre alors :

$$\arctan\left(\frac{1}{p}\right) = \arctan\left(\frac{1}{p+r}\right) + \arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)$$

3. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) ; \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{4+\sqrt{3}x}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Correction

1.(a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|\cos(y)| = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(y)}}$$

En particulier puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2}$ et donc :

$\cos(\arctan(x)) \geq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} |\cos(\arctan(x))| &= \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

(b) Comme tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(\arctan(x)) = x \quad \text{câd} : \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = x$$

donc :

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(x)) &= x \cos(\arctan(x)) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

2.(a) D'une part :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{p}\right)^2}} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned} &\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p+r}\right) + \arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)\right) \\ &= \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p+r}\right)\right) \cos\left(\arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)\right) \\ &\quad - \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{p+r}\right)\right) \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{p+q}\right)\right) \\ &= \frac{(p+r)}{\sqrt{1+(p+r)^2}} \frac{(p+q)}{\sqrt{1+(p+q)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+(p+r)^2}} \frac{1}{\sqrt{1+(p+q)^2}} \\ &= \frac{p^2 + rp + pq + rq - 1}{\sqrt{1+(p+r)^2} \sqrt{1+(p+q)^2}} \\ &= \frac{2p^2 + rp + pq}{\sqrt{p^2 + 2pq + q^2 + 1} \sqrt{p^2 + 2pr + r^2 + 1}} \\ &= \frac{2p^2 + rp + pq}{\sqrt{rq + 2pq + q^2} \sqrt{rq + 2pr + r^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2p^2 + rp + pq}{\sqrt{rq}\sqrt{r+2p+q}\sqrt{q+2p+r}} \\
&= \frac{p(2p+r+q)}{\sqrt{1+p^2}(2p+r+q)} \\
&= \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3. Pour $x = 0$ cette égalité est vérifiée.

Pour $x > 0$ on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{4+\sqrt{3}x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\frac{4}{x}+\sqrt{3}}\right)$$

On prend alors : $p = \sqrt{3}$, $q = x$ et $r = \frac{4}{x}$ on a bien : $1 + p^2 = rq$. Et d'après ce qui précède :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\frac{4}{x}+\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

et donc :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\frac{4}{x}+\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

comme $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\frac{4}{x}+\sqrt{3}}\right) \in]0, \pi[$ donc :

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}+x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\frac{4}{x}+\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Exercice 31

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1. Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .
2. Montrer est une bijection de D_f dans un intervalle J à déterminer .
3. Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ (f^{-1} la fonction réciproque de f).

Correction

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

1. Soit D_f l'ensemble des définition de la fonction f .

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left(x \geq 0 \text{ et } 1 - x^{\frac{2}{3}} \geq 0 \right) \Leftrightarrow x \in [0, 1]$$

2. $u : x \mapsto 1 - x^{\frac{2}{3}}$ continue sur $[0, 1]$ et $v : x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ continue sur $[0, 1]$. Puisque $f = v \circ u$ donc f est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues .

Soient a et b deux éléments de $[0, 1]$ tels que $a < b$.

$$a < b \Rightarrow 1 - a^{\frac{2}{3}} > 1 - b^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \left(1 - a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} > \left(1 - b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(a) > f(b).$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0, 1]$. On peut donc conclure par le théorème de la bijection que f est une bijection de $[0, 1]$ dans $J = f([0, 1])$.

$J = [f(1), f(0)] = [0, 1]$. Soit f^{-1} sa fonction réciproque .

3.

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

$$x \in [0,1] \quad y \in [0,1]$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} &= y \Leftrightarrow \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right) = y^{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} &= 1 - y^{\frac{2}{3}} \\ \Leftrightarrow x &= \left(1 - y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

D'où :

$$(\forall x \in [0, 1]) ; f^{-1}(x) = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 32

Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$(\forall x \in [0, 1]) ; g(x) = 2\sqrt{1 - x^2}$$

Montrer que g réalise une bijection de $[0, 1]$ dans un intervalle J à déterminer , puis définir sa fonction réciproque

Correction $u : x \mapsto 1 - x^2$ continue sur $[0, 1]$

(restriction de fonction polynomiale) et $v : x \mapsto 2\sqrt{x}$ continue sur $[0, 1]$. Puisque $g = v \circ u$ donc g est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues .

Soient a et b deux éléments de $[0, 1]$ tels que $a < b$.

$$a < b \Rightarrow 1 - a^2 > 1 - b^2 \Rightarrow 2\sqrt{1 - a^2} > 2\sqrt{1 - b^2} \Rightarrow g(a) > g(b).$$

Donc g est strictement décroissante sur $[0, 1]$. On peut donc conclure par le théorème de la bijection que g est une bijection de $[0, 1]$ dans $J = g([0, 1])$.

$J = [g(1), g(0)] = [0, 2]$. Soit g^{-1} sa fonction réciproque .

$$g(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1}(y) = x$$

$$x \in [0,1] \quad y \in [0,1]$$

Donc :

$$2\sqrt{1-x^2} = y \Leftrightarrow (1-x^2) = \frac{y^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{y^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} \quad \text{car } x \geq 0$$

D'où :

$$(\forall x \in [0,1]) ; g^{-1}(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Exercice 33

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

1. Vérifier que le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}_+$.

2. calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. Étudier la continuité de f en 1.

4. Soit g la restriction de f à $[1, +\infty[$

(a) Montrer que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer.

(b) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Correction

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1. D_f &= \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}; (x-1 \geq 1 \text{ et } 1+\sqrt[3]{x-1} \neq 0 \text{ avec } x \geq 1) \\ \text{ou} \quad (x \geq 0 \text{ et } 1-\sqrt{x} \neq 0 \text{ avec } 0 \leq x < 1) \end{array} \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; (x \geq 1) \text{ ou } (0 \leq x < 1)\} \\ &= [0, +\infty[. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} + 1} \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} = \frac{\pi}{2} = f(1)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = +\infty$$

donc f continue en 1.

4. g la restriction de f à $[1, +\infty[$

(a) On considère les fonctions $u : x \mapsto \frac{x}{1-x}$ et $v : x \mapsto \sqrt[3]{x-1}$.

On a $(\forall x \geq 1)$; $g(x) = \frac{\pi}{2} + (u \circ v)(x)$ u strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ et v strictement croissantes sur $[1, +\infty[$ il vient alors que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Les deux fonctions u et v sont continues donc g est continue sur $[1, +\infty[$. donc g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans $g([1, +\infty[) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1 \right[$.

(b) On a :

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{1 + \sqrt[3]{x-1}} = \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x-1}}$$

Donc :

$$\begin{array}{c} g(x) \\ x \in [1, +\infty[\end{array} = y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} g^{-1}(y) \\ y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1[\end{array}$$

$$\begin{aligned} g(x) = y &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x-1}} = y \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x-1}} = \frac{\pi}{2} + 1 - y \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 1 - y} - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 1 - y} - 1 \right)^3 + 1 \end{aligned}$$

D'où :

$$\left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1 \right] \right) ; g^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 1 - x} - 1 \right)^3 + 1$$

Exercice 34

On considère f la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \sin(x).$$

1. Montrer que f est une bijection de I dans $] -1, 1[$, f^{-1} sa fonction réciproque .
2. Démontrer que :

$$(\forall x \in] -1, 1[) ; f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Correction

On considère f la fonction définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \sin(x).$$

1. La fonction f est dérivable (en particulier continue) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ comme restriction de la fonction trigonométrique $x \rightarrow \sin(x)$ à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Et on a :

$$\left(\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) ; f'(x) = \cos(x) > 0$$

f est donc strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'où f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, 1[$. sa fonction réciproque est notée $x \rightarrow \arcsin(x)$ n'est plus au programme je sais pas pourquoi.

2. Pour cette question on va utiliser la proposition suivante :

Si f une fonction de $I \rightarrow J$ et g fonction de $J \rightarrow I$ tels que :

$$(\forall x \in J) ; f(g(x)) = x \text{ et } (\forall x \in I) ; g(f(x)) = x$$

alors f est une bijection de I dans J et sa fonction réciproque :

$$f^{-1} = g$$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)}} \right) &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{\left(1 - \tan(\frac{x}{2})\right)^2}{\left(1 + \tan(\frac{x}{2})\right)^2}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)^2} \right) \end{aligned}$$

comme $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right)^2} \right) &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \\ &= x \end{aligned}$$

Pour $x \in]-1, 1[$:

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right) &= \cos \left(2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right) \\ &= \cos^2 \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right) - \sin^2 \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)^2}} \right)^2 \quad (\text{résultats exercice 29}) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} - \frac{\frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

De la proposition précédente on a alors :

$$(\forall x \in]-1, 1[) , f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$$

Exercice 35

f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.(a) Calculer les limites de f aux bords de son domaine de définition.

(b) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

(c) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2. On pose pour tout $x \in]-1, 1[$; $F(x) = \arctan(f(x))$

(a) Montrer que F est une bijection de $] -1, 1[$ dans un intervalle K à déterminer.

(b) Donner l'expression de $F^{-1}(x)$ pour tout $x \in K$.

3. Dédurre alors que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Correction

f la fonction définie sur $] -1, 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.(a) Il est facile de vérifier que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

(b) La fonction f est dérivable (**en particulier continue**) sur $] -1, 1[$ et on a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in] -1, 1[) ; f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} \\ &= \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $] -1, 1[$. Et donc f est une

bijection de $] -1, 1[$ dans $f(]-1, 1[) = \mathbb{R}$.

(c) Pour $x \in] -1, 1[$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= y \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = y \quad (x \text{ et } y \text{ ont même signe}) \\
 \Rightarrow x^2 &= (1-x^2)y^2 \\
 \Rightarrow x^2 &= \frac{y^2}{1+y^2} \\
 \Rightarrow x &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-y}{\sqrt{1+y^2}} \\
 \Rightarrow x &= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad (\text{car } x \text{ et } y \text{ ont même signe}).
 \end{aligned}$$

D'où :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Pour $x \in] -1, 1[$:

$$F(x) = \arctan(f(x))$$

(a) F est composé de deux fonctions continues et strictement croissantes, donc F est continue strictement croissante sur $] -1, 1[$, c'est une bijection de $] -1, 1[$ dans $F(]-1, 1[) =] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(b) Pour $x \in] -1, 1[$:

$$F(x) = y \Leftrightarrow x = F^{-1}(y) \quad \left(y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right)$$

$$\begin{aligned}
 \arctan(f(x)) &= y \Leftrightarrow f(x) = \tan(y) \\
 \Leftrightarrow x &= f^{-1}(\tan(y)) \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{\tan(y)}{\sqrt{1+\tan^2(y)}}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\left(x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right); F^{-1}(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \sin(x).$$

(c) On a :

$$\left(z \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right); \quad F^{-1}(z) = \frac{\tan(z)}{\sqrt{1 + \tan^2(z)}} = \sin(z).$$

on prend $z = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc :

$$\begin{aligned} \sin(\arctan(x)) &= \frac{\tan(\arctan(x))}{\sqrt{1 + \tan^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$