تمارينخاصة بمستوى الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم الرياضية

تقترح المنسقية المركزية التخصصية في مادة الرياضيات مجموعة من التمارين،مستقاة من برنامج شعبة الرياضيات و التي يمكن الاستعانة بها في إعداد التلاميذ لاجتياز امتحانات الباكالوريا أو في إعداد مواضيع الامتحانات التجريبية .

و للإشارة فإن هذه التمارين لا تعكس جميع الإمكانيات التي يتيحها مقرر هذه الشعبة و بالتالي فهي لا تشكل لائحة مغلقة لهذه الإمكانيات.

ينبغي كذلك الإشارة إلى أن هذه التمارين لم تخضع إلى المسطرة التي تتبع في اختيار مواضيع البكالوريا (التجريب و المصادقة...إلخ) كما يمكن أن تتخللها بعض الأخطاء المطبعية أو اللغوية.

البنيات الجبرية

نزود IR^2 بقانون تركيب الداخلي المعرف بما يلي : $\forall(x,y,a,b)\in IR^4 \quad (x,y)*(a,b)=(x+a,\ ye^a+be^{-x})$

1) احسب: $(1,0)*(2,1)$ ثم $(2,1)*(1,0)$. ماذا تستنتج ؟
2) أثبت أن القانون $*$ تجميعي في IR^2 .
3) أثبت أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في IR^2 .
4) بين أن جميع عناصر IR^2 تقبل مماثلا في $(IR^2,*)$
5) استنتج بنية $(IR^2,*)$.

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية .

نضع : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ae^a & e^a\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{Z}\right\}$ ونعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو E المعرف بما يلي : $\forall a\in\mathbb{Z},\ f(a)=M_a$

1.أ. بين أن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

ب. بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},+)$ نحو $(E,\times)$.

ج. استنتج بنية $(E,\times)$.

2. نضع $(M_a)^0=I$ و $(M_a)^1=M_a$ و $\forall n\in\mathbb{N},\ (M_a)^{n+1}={M_a}^n\times M_a$ و $\forall p\in\mathbb{Z}_*^-,\ (M_a)^p=\left({M_a}^{-1}\right)^{-p}$

أ. بين أن: $\forall p\in\mathbb{Z}\ ,\ (M_a)^p=M_{ap}$

ب. ناقش حسب قيم n حلو ل المعادلة : $(M_x)^n\times M_5=M_{5n}$ (حيث $x\in\mathbb{Z}$ هو المجهول) .

نعتبر المصفوفة: $A=\begin{pmatrix}2&0\\-1&1\end{pmatrix}$ و المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

1) أحسب $A^2-3A+2I$ ثم استنتج أن A تقبل مقلوبا في $(M_2(IR),\times)$ يتم تحديده.

2) نعتبر E مجموعة المصفوفات من نوع: $M_a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\frac{1}{a}&a-\frac{1}{a}\\a-\frac{1}{a}&a+\frac{1}{a}\end{pmatrix}$ حيث $a\in IR^*$.

نضع $J=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; $K=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

أ) أحسب J^2 ; K^2 , JK , KJ .

ب) أحسب M_a بدلالة J و K

ج) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

3) نعتبر التطبيق f من IR^* نحو E المعرف بما يلي : $f(a)=M_a$

أ) بين أن f تشاكل تقابلي من $(IR^*;\times)$ نحو $(E;\times)$

ب) استنتج بنية $(E;\times)$ ثم حدد مقلوب M_a في $(E;\times)$

لكل زوج (x,y) من المجموعة $\mathbb{R}^2$ نضع: $\boldsymbol{x\perp y=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}}$

1- أ) تحقق من أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$.

ب) تحقق من أن لكل زوج (x,y) من المجموعة $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy=\sqrt{1+(x\perp y)^2}}$

2) أ)بين أن التطبيق u المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $\boldsymbol{u(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وحدد u^{-1}.

ب)باستعمال التطبيق u أو u^{-1} بين أن: $(\mathbb{R};\perp)$ زمرة تبادلية.

ج)حدد العنصر المحايد للزمرة $(\mathbb{R};\perp)$ ومماثل عنصر x من المجموعة $\mathbb{R}$ بالنسب للقانون $\perp$.

3) نضع لكل $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ و لكل عدد عدد صحيح طبيعي $\boldsymbol{n\in\mathbb{N}-\{0,1\}}$: $\boldsymbol{x^{[0]}=0}$ و $x^{[1]}=x$ و

$$\boldsymbol{x^{[n]}=\underbrace{x\perp x\perp\cdots\perp x}_{\text{N مرة}}}$$

احسب $\boldsymbol{x^{[n]}}$ بدلالة $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{n}$.

نذكر أن $(M_3(IR),+,x)$ حلقة واحدية .

نعتبر المجموعة $G=\{M_\theta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}/\theta\in IR\}$.

1) بين أن G جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $M_3(IR)$.

2) نعتبر المجموعة : $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$.

بين أن (U,x) زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C}^*,\times)$.

3) نعتبرالتطبيق ϕ المعرف من U نحو G بحيث : $\phi(e^{i\theta})=M_\theta$.

أ) بين أن ϕ تشاكل تقابلي من (U,x) نحو (G,x) .

ب)استنتج أن (G ,x) زمرة تبادلية .

4) أحسب $(M_\theta)^{-1}$ و $(M_\theta)^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

A− نعتبر المجموعة $G=\mathbb{R}-\{\sqrt{3}\}$.

لكل a وb من G تضع : $a*b=a+b-\frac{ab}{\sqrt{3}}$.

1) تحقق من أن $\forall(a,b)\in G^2\ a*b=\sqrt{3}-\sqrt{3}(\frac{a}{\sqrt{3}}-1)(\frac{b}{\sqrt{3}}-1)$.

2) بين أ ن $(G,*)$ زمر ة تبا دلية .

B−نعتبر المجموعة $\Gamma=\left\{M(a)=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-a&a\\a&2\sqrt{3}-a\end{pmatrix}/a\in G\right\}$,

و المصفو فتين $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1) أ− تحقق من أ ن $J^2=-2J$ و أن $\forall a\in G, M(a)=I+\frac{a}{2\sqrt{3}}J$.

ب− بين أ ن المجموعة Γ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) نعتبر التطبيق $\begin{aligned}f:G&\to\Gamma\\a&\mapsto M(a)\end{aligned}$.

أ− بين أن f تشا كل تقابلي من $(G,*)$نحو $(\Gamma,\times)$.

ب− استنتج بنية $(\Gamma,\times)$.

نعتبر المصفوفات الآتية : $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

1) أ) تحقق أن : $(A+3I)\times(A-I)=0$

ب) استنتج A^2 بدلالة I و A

2) نعتبر المجموعة $E=\{M(a,b)\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/M(a,b)=aI+bA, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$

أ) بين أن : $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

ب) بين أن الأسرة (I,A) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$

3) أ) بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

ب) بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية وتبادلية . هل هي كاملة؟

4) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ محددا مقلوبها.

نعتبر في $M_2(IR)$ المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

و المجموعة : E= $\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b&\frac{-\sqrt{2}}{2}b\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}b&a-\frac{\sqrt{2}}{2}b\end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$

1 ــ ا ــ بين ان $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب ــ بين ان الأسرة (I,J) اساس في الفضاء المتجهي $(E,+,.)$

2 ــ نعتبر التطبيق : $h\ :\ \mathbb{C}^*\to E^*$ حيث: $E^*=E-\{M(a,b)\}$

$$a+ib\ \mapsto\ M(a,b)$$

ا ــ تحقق من ان $J^2=-I$

ب ــ استنتج ان E جزء مستقر في $(M_2(IR),\times)$

ج ــ بين ان h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

د ــ أستنتج بنية $(E^*,\times)$

3 ــ حدد في E المصفوفة X حيث $X^3=J$

نعتبر المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

1) احسب J^2 بدلالة I و J

2) بين أن (I,J) أسرة حرة في $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

3) نعتبر المجموعة : $F=\left\{\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

أ) بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

ب) تحقق أن $I\in F$ و $J\in F$

ج) استنتج أساسا للفضاء المتجهي $(F,+,.)$

4) أ) بين أن $(F,+,\times)$ حلقة واحدية.

ب) بين أن J تقبل مقلوبا في F ثم حدد J^{-1} (يمكنك استعمال السؤال 1)

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(IR),+,.)$فضاء متجهي حقيقي و $(C,+,\times)$ جسم تبادلي .

نضع : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b)\in IR^2\right\}$ و $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1) أ ـــ بين أن $(E,+,.)$فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(IR),+,.)$.

ب ـــ بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$.

2) نعتبر التطبيق : $\begin{array}{l} f:\mathbb{C}\to E \\ \text{a+ib}\mapsto M(a-b,b) \end{array}$

أ ـــ بين أن E جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$

ب ـــ بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(E,\times)$.

3) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية .

4) أ ـــ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3=2-2i$ واكتب حلولها على الشكل الجبري .

ب ـــ استنتج في المجموعة E حلول المعادلة : $M^3-4I+2J=0$

لتكن E مجموعة الدوال العددية $f_{(a,b)}$ بحيث $\forall x\in IR:\ f_{(a,b)}(x)=(ax+b)e^{2x}$

1) $a-$بين أن $(E,+,\cdot)$فضاء متجهي حقيقي.

$b-$نضع $B=(f_{(1,0)},f_{(0,1)})$ بحيث $f_{(1,0)}(x)=xe^{2x}$ و $f_{(0,1)}(x)=e^{2x}$.

بين أن B أساس للفضاء المتجهي E.

2) نزود المجموعة E بقانون تركيب داخلي معرف كما يلي: $f_{(a,b)}Tf_{(c,d)}=f_{(ac-bd,bc+ad)}$ لكل $f_{(a,b)}$ و $f_{(c,d)}$ من E

نعتبر التطبيق $\phi:\mathbb{C}^*\to E^*$ بحيث $\varphi(z)=f_{(a,b)}$ مع $z=a+ib$ مع $(a,b)\in IR^2$

$a-$ بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو (E^*,T)

$b-$ استنتج بنية (E^*,T) .

$c-$ بين أن $(E,+,T)$ جسم تبادلي.

$d-$ حل في E المعادلة $\underbrace{f_{(a,b)}Tf_{(a,b)}T\ldots Tf_{(a,b)}}_{\text{n مرة}} = f_2$

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 .

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ وأن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$فضاء متجهي حقيقي .

لتكن E مجموعة المصفوفات $M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&a+c&b\\c&b&a\end{pmatrix}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية

ونعتبر المصفوفتين $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ و $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

1) بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2) بين أن (I,J,K) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3) أ – تحقق أن $J^2=I+K$ وأن $K^2=I$ وأن $JK=KJ=J$

ب – استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

ج – بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية

4) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ (يمكنك استعمال 3) أ –)

5) نضع $X=\frac{1}{\sqrt{2}}J$

أ – بين أن $X^2=\frac{1}{2}(I+K)$ ثم أن $X^3=X$

ب – استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ $X^{2n-1}=X$

نعتبر المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{\mathrm{M}(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} / (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$.

1)- أ- بين أن $(\mathrm{E},+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب- نضع : $I=\mathrm{M}(1,0,0)$ و $J=\mathrm{M}(0,1,0)$ و $K=\mathrm{M}(0,0,1)$.

بين أن الأسرة $\mathrm{B}=(I,J,K)$ أساس للفضاء المتجهي E و حدد $\dim(\mathrm{E})$.

2)- أ- أحسب J^2 و K^2 و $J\times K$ و $K\times J$.

ب- بين أن E جزء مستقر في $(\mathrm{IM}_3(\mathbb{R}),\times)$.

3)- بين أن $(\mathrm{E},+,\times)$ حلقة واحدية ، هل هي تبادلية ؟ هل هي حلقة كاملة ؟

4)- نعتبر المصفوفة $\mathrm{P}=\mathrm{M}(1,0,-3)$.

أ- أحسب P^2 و حدد علاقة بين P^2 و P و I (حيث I هي المصفوفة الوحدة) .

ب- بين أن المصفوفة P تقبل مقلوبا P^{-1} ينبغي تحديده .

نذكر بأن $(\mathrm{M}_3(IR);+;\times)$ حلقة واحديه.

نعتبر المصفوفتين $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1°) أ- تحقق من أن: $A^2=A+2I$

ب- استنتج أن A تقبل مقلوبا في $\mathrm{M}_3(IR)$ ثم حدد A^{-1}

2°) لتكن E مجموعة المصفوفات $M(a;b)$ حيث: $M(a;b)=aI+bA$ و $(a;b)\in IR^2$

أ -بين أن E جزء مستقر في $(\mathrm{M}_3(IR);+;\times)$

ب -بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية و واحديه.

3°) نعرّف في IR^2 قانوني التركيب الداخليين + و $*$ كالتالي:

$$\forall(a;b)\in IR^2\ ;\ \forall(c;d)\in IR^2 \qquad (a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$$
$$(a;b)*(c;d)=(ac+2bd;ad+bc+bd)$$

أ- احسب: $(1;1)*(2;-1)$

ب- نعتبر التطبيق: $h:\begin{cases} E \to \mathbb{R}^2 \\ M(a,b) \to (a,b) \end{cases}$

بين أن h تشاكل تقابلي من $(E;+)$ نحو $(M_3(IR);+)$ و من $(E;\times)$ نحو $(IR^2;*)$

ج- بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في IR^2 ثم استنتج بنية $(IR^2;+;*)$

د- هل $(IR^2;+;*)$ جسم ؟ علل جوابك

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها

$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. O_2 هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

نعتبر في $M_2(\mathbb{R})$ المصفوفة التالية: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$ ولتكن E المجموعة التالية:

$$E=\left\{ x\,I+y\,A/(x,y)\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

1) أ- تحقق أن: $A^2=-A-I$.

ب- بين أن A تقبل مقلوبا A^{-1} في $M_2(\mathbb{R})$ و حدده.

2) أثبت أن (A,I) أسرة حرة في $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$.

3) بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي من $M_2(\mathbb{R})$ و حدد بعده.

4) نعتبر التطبيق f المعرف من $\mathbb{C}$ نحو E بمايلي:

$$\left(j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+jy)=xI+yA$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(E,\times)$.

ب- بين أن $(E,+,\times)$جسم تبادلي.

ج- حل في E المعادلة: $X^2-(A+2I)X+2A=O_2$.

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a-b\end{pmatrix}$ من $M_2(\mathbb{R})$

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1-بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

2- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3-أ -بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $x^2-xy+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$

ب-حدد العناصر $M(a,b)$ من E التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(E,+,\times)$.

ج-استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

4- -بين أن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

نذكر أن $\left(M_2(IR),+,\times\right)$ حلقة واحدية وحدتها $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $\left(M_2(IR),+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{7}{4}\end{pmatrix}$

1) بين أن: $A^2-3A+2I_2=\mathrm{O}$ حيث: $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

2) لتكن E المجموعة : $E=\left\{xA+yI_2/(x,y)\in IR^2\right\}$

أ) بين أن E زمرة جزئية من $\left(M_2(IR),+\right)$

ب) بين أن E جزء مستقر من $\left(M_2(IR),\times\right)$

ج) بين أن $\left(E,+,\times\right)$ حلقة واحدية وتبادلية

د) احسب $\det\left(A-I_2\right)$

3) هل $\left(E,+,\times\right)$ جسم ؟ علل جوابك

4) أ) بين أن $\left(E,+,\bullet\right)$ فضاء متجهي حقيقي

ب) بين أن $B=\left(I_2,A\right)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $\left(E,+,\bullet\right)$

ج) حدد زوج إحداثيتي A^{-1} بالنسبة للأساس B ثم استنتج أن $B'=\left(A,A^{-1}\right)$ أساسا للفضاء المتجهي $\left(E,+,\bullet\right)$

5) حدد زوج إحداثيتي I_2 بالنسبة للأساس B'

تمارين حول الأعداد العقدية

نعتبر المعادلة : $\left(E_n\right) \quad z^n=\left(iz+2i\right)^n \ , n\in\mathbb{N}^* \ , z\in\mathbb{C}$

1)أ− حدد الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 حلي المعادلة $\left(E_2\right)$ $\left(\operatorname{Im} z_1>0\right)$

ب− نضع : $u_p=z_1^{\,p}+z_2^{\,p} \ , \ \forall p\in\mathbb{N}$ بين أن: $u_p=2\sqrt{2}^{\,p}\cos\dfrac{3p\pi}{4}$

ج− استنتج قيم p التي من أجلها يكون: $u_p=\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.نعتبر النقطتين $A_{(-2)}$ و $M_{(z)}$ حيث $z\in\mathbb{C}$.

أ− بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة $\left(E_n\right)$ فإن $OM=AM$.

ب− استنتج أن كل حلول المعادلة $\left(E_n\right)$ تكتب على شكل $-1+\lambda i \ , \ \lambda\in\mathbb{R}$

3) أ− حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $\left(E_n\right)$.

ب− بين أن حلول $\left(E_n\right)$ تكتب على شكل $k\in\{0,1,...,n-1\}$ $z_k=-1+i\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{4}\right)$

نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية المعادلة التالية : $\dfrac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2(1+i)z-4i=0 \ : \ (E)$.

1) أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يجب حديده.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط التالية: $A(1+i\sqrt{3}) \ , \ B(1-i\sqrt{3}) \ , \ C(2i)$

أ) بين أن: $OA=OB$

ب) حدد لحق النقطة D منتصف القطعة $[AC]$ وحدد قياسا للزاوية $(\vec{u};\vec{OD})$

ج) استنتج القيم المضبوطة للعددين : $\cos(\dfrac{5\pi}{12}) \ , \ \sin(\dfrac{5\pi}{12})$

د) لتكن O' صورة O بالدوران R_1 الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{-\pi}{2}$ و B' صورة B بالدوران R_2 الذي مركزه A وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$. حدد لحقي $O' \ , \ B'$

ه) لتكن I منتصف القطعة $[OB]$ بين أن (AI) ارتفاع في المثلث $AO'B'$

ليكن a عددا عقدياً حيث $a \neq i$ ؛نعتبر $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, و $\overline{j}$ مراقفه

نعتبر الحدودية P المعرفة بما يلي : $(\forall z \in C) : P(z) = z^2 + (a-i)z + (a-i)^2$

1) أ- تحقق أن : $P(z) = [z-(a-i)j] \times [z-(a-i)\overline{j}]$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م,م,م نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها $z_A = i-a$ و $z_B = (a-i)j$

و $z_C = (a-i)\overline{j}$ على التوالي . نعتبر الدوران الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C .

أ- حدد زاوية هذا الدوران r .

ب- إعط الكتابة العقدية للدوران r .

3) نفترض أن $a=1$

أ- حدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية z_A , z_B , z_C .

ب- حدد d لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع

ج- بين أن $(AD) \perp (BC)$ واستنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

نعتبر المعادلة التالية في $\mathbb{C}$, $(E); 2z^2(1-\cos(2\theta)) - 2z\sin(2\theta) + 1 = 0$. حيث $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة /(E)

2) أكتب على الشكل المثلثي العد دين z_1 و z_2 (ناقش حسب قيم θ).

3) نعتبر النقط $I(\frac{1}{2\sin\theta}), B(\frac{e^{i\theta}}{2\sin\theta}), A(\frac{e^{-i\theta}}{2\sin\theta})$.

أ- حد د المجمو عة Σ للأعد اد الحقيقية θ من $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ بحيث يكو ن المثلث OAB متساوي الساقين

و قائم الزاوية في O .

ب- أعط التمثيل العقدي للد وران الذي مركزه I و يحول A الى B .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z) = z^3 - z^2 - (5+4i)z + 21 - 12i$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أن لها حلا حقيقيا .

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

لتكن A و B و I النقط التي ألحاقها على التوالي : $z_A = 3+2i$ و $z_B = -3$ و $z_I = 1-2i$

أ ــ احسب : $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ و استنتج طبيعة المثلث IAB .

ب ــ z_c لحق النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي التي مركزه A ونسبته 2 .

ج ــ لتكن النقطة D مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$. حدد لحق النقطة D .

د ــ بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ وأنشئها .

4) حدد (C) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ وأنشئها .

A)نعتبرفي المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-(i\sqrt{2})z^2+z(-1+i\sqrt{3})+\sqrt{6}+(\sqrt{2})i=0 \qquad (E)$

1) بين أن المعادلة E تقبل حلا تحليليا صرفا تحدده و أن : $(E)\Leftrightarrow (z-z_0)(z^2-1+i\sqrt{3})=0$

2)حل في $\mathbb{C}$ المعادلة E.

3)بين أن النقط M_0 و M_1 و M_2 صور الحلول z_0 و z_1 و z_2 للمعادلة (E)،

في المستوى العقدي ، هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ، و تنتمي إلى دائرة مركزها أصل المعلم.

B)1–أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3=1$

ب.نعتبر العدد العقدي: $j=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ج) تحقق أن : $1+j+j^2=0$ و أن $-j^2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

2) –نعتبر الدوران R الذي مركزه النقط C ذات اللحق c و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الذي يربط كل نقطة M لحقها zبالنقطة M' التي لحقها z'.

أ–بين أن $z'=-j^2z-jc$

ب–لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي لحقاهما على التوالي a و b.بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع إذا و فقط إذا كان: $a+bj+cj^2=0$ أو $a+bj^2+cj=0$

3)حدد مجموعة النقط M التي لحقها z ،من المستوى العقدي، بحيث تكون النقط $M(z)$ و $P(z-1)$ و $Q(z^2)$ مستقيمية.

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$و m عدد عقدي.

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2-(m-i\,\overline{m}+1-i)z-i|m-i|^2=0$

أ– تحقق أن مميز المعادلة هو : $\Delta=(m+i\,\overline{m}-1-i)^2$

ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة(E).

ج– بين أن m ليس حلا للمعادلة (E)

2) في كل مايلي نفترض أن $m\neq i$ ونضع: $z_1=m-i$ و $z_2=1-i\overline{m}$

نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $A(z_1)$ و$B(z_2)$

أ- بين أن $A \neq O$ و $B \neq O$ وأن $OB = OA$

ب- حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون $(OA) \perp (OB)$

ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ تكون النقط O و A و B مستقيمية.

د- حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ في الحالة $m = e^{i\frac{\pi}{3}}$

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

نعتبر التطبيق g المعرف من $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ - الى $\mathbb{C}$ بحيث : $g(z) = \dfrac{iz}{z-i}$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $g(z) = \dfrac{i}{z}$.

2) أ- بين أن : $(\forall z \in IC - \{i\})\left(g(z) \in iIR \Leftrightarrow |z|^2 = \mathrm{Im}(z)\right)$

ب- استنتج مجموعة النقط M(z) بحيث g(z) تخيلي صرف.

3) أ- بين أن المجموعة $C = \{M(z) : |g(z) - i| = 2\}$ هي دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

ب-بين أن المجموعة $D = \left\{M(z) : \arg\left(g(z) - i\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}\right\}$ هي نصف مستقيم محروم من النقطة A(i) .

ج- حدد تقاطع المجموعتين C و D .

4) نضع $z = e^{i\theta}$ حيث : $\theta \in [0, \pi[$. حدد بدلالة θ معيار و عمدة العدد العقدي g(z) .

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

نضع : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي $a = 8$ و $b = 6j$ و $c = 8j^2$.

لتكن A' صورة B بالدوران r_1 الذي مركزه C و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$ و B' صورة C بالدوران r_2 الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$

و C' صورة A بالدوران r_3 الذي مركزه B و زاويته $\dfrac{\pi}{3}$.

1)- أنشىء النقط A ، B ، C و A' ، B' و C' في المعلم $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2)- نضع : a' و b' و c' ألحاق A' ، B' و C' على التوالي .

أ– بين أن $a^{'}$ عددا حقيقيا .

ب– بين أن : $b^{'} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و إستنتج أن $O \in \left(BB^{'}\right)$.

ج– بين أن : $c^{'} = 7 + 7i\sqrt{3}$.

د– بين أن المستقيمات $\left(AA^{'}\right)$ و $\left(BB^{'}\right)$ و $\left(CC^{'}\right)$ تتلاقى في النقطة O .

3)– أ– أحسب المسافة $OA + OB + OC$.

ب– بين أن : $j^{3} = 1$ و $1 + j + j^{2} = 0$.

ج– نعتبر نقطة M لحقها z في المستوى العقدي $\left(\mathrm{P}\right)$.

إستنتج أن : $\left|\left(a-z\right)+\left(b-z\right)j^{2}+\left(c-z\right)j\right| = \left|a+bj^{2}+cj\right| = 22$.

د– أثبت أن المسافة $MA + MB + MC$ دنوية عندما يكون $M = O$.

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم \ $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z) = z^{3} - z^{2} - (5+4i)z + 21 - 12i$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$ علما أن لها حلا حقيقيا .

2) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$.

لتكن A و B و I النقط التي ألحاقها على التوالي : $z_{A} = 3 + 2i$ و $z_{B} = -3$ و $z_{I} = 1 - 2i$

أ ــ احسب : $Z = \dfrac{z_{I} - z_{A}}{z_{I} - z_{B}}$ واستنتج طبيعة المثلث IAB .

ب ــ z_{c} لحق النقطة C صورة النقطة I بالتحاكي التي مركزه A ونسبته 2 .

ج ــ لتكن النقطة D مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$. حدد لحق النقطة D .

د ــــ بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$ وأنشئها .

4) حدد (C) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$ وأنشئها .

ليكن a عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E_a): \quad z^3+(3-a^2)z+2i(1+a^2)=0$

1°) أ- تحقق من أن العدد $z_0=2i$ حل للمعادلة (E_a)

ب- حدد الحلين الآخرين z_1 و z_2 بحيث $z_1-z_2=2a$

2°) نعتبر فيما يلي النقط $M_0(z_0)$ ؛ $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

نفترض في هذه الفقرة أن: $|a|=1$ وليكن I منتصف القطعة $[M_1M_2]$

أ- بين أن المسافة M_1M_2 والنقطة I غير مرتبطان بالعدد a

ب- استنتج أن M_1 و M_2 تنتميان إلى دائرة ثابتة (C) عندما يتغير a في $\mathbb{C}^*$

ج- لتكن A النقطة التي لحقها a. حدد قيم a التي تكون من أجلها النقط A ؛ M_1 و M_2 مستقيمية.

3°) أ- بين أن: $a\in IR \Leftrightarrow M_1M_0=M_0M_2$

ب- حدد قيمة العدد a علماً أن M_2 هي صورة M_1 بالدوران R الذي مركزه M_0 و زاويته $\frac{\pi}{2}$

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_a): 2z^2+a(1-i)z+a^2(1-i)=0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

1) أحسب $(a+3ia)^2$.

2) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_a).

3)حدد معيارو عمدة كل من z_1 و z_2 بدلالة معيار و عمدة a .

II- في المستوى العقدي (P)المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي a و ia .

1) بين أن المثلث OAB قائم الزاوية و متساوي الساقين.

2) ليكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=(1+i)z-ia$

أ- نفترض أن $M\neq A$. بين أن $AM'=\sqrt{2}AM$ وحدد قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})$.

ب- لتكن (C) الدائرة التي مركزها A و شعاعها $\sqrt{2}$.

بين أن صورة(C) بالتطبيق F هي دائرة (C') محددا مركزها و شعاعها.

ج- نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و التطبيق $h=r\circ F$.

حدد الصيغة العقدية للتطبيق h و استنتج طبيعته و عناصره المميزة.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\quad z^2 - z(9+i\sqrt{3}) + 26 + 6i\sqrt{3} = 0$

1–أ– احسب : $(1-3i\sqrt{3})^2$

ب– حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

2–المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنطم و مباشر $(o,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطة A التي لحقها : $a = 5 - i\sqrt{3}$ و النقطة B بحيث OAB مثلث متساوي الأضلاع و $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

أ– بين أن لحق النقطة B هو : $b = 4 + 2i\sqrt{3}$

ب–استنتج لحق النقطة. I منتصف القطعة $[OB]$.

ج–حدد z_k لحق النقطة K بحيث يكون ABIK متوازي أضلاع .

3–أ–بين أن $\frac{z_k - a}{z_k}$ عدد تخيلي صرف. ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث OAK ؟

ب–بين أن OAIK متوازي أضلاع .

ج–لتكن النقطة C التي لحقها $c = \frac{2a}{3}$ بين أن النقط B و C و K مستقيمية.

---

1) نعتبرفي مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (e) التالية: $(e):\quad 2z^2 + \left(3\sqrt{3} + i\right)z + 3 + i\sqrt{3} = 0$

ونسمي z_1 و z_2 حَلَّـــيَّ المعادلة (e) حيث $|z_1| < |z_2|$.

أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (e). (لاحظ أن $\left(\sqrt{3} - i\right)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$)

ب) اكتب z_1 و z_2 على شكلهما المثلثي ثم تحقق أن z_1 هو جذر من الرتبة 12 للوحدة.

2) المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ و $B(-i)$ و $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$ و $D\left(-\sqrt{3}\right)$، ونسمي r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) اكتب الصيغة العقدية للدوران r.

ب) أوجد لحق النقطة E صورة B بالدوران r.

ج) تأكد أن النقطة C هي صورة D بالدوران r.

3) بين أن النقطة E هي مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2),(B,2),(C,-3)\}$.

ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

$\boxed{\text{I}}$ (1) أنشر العدد $\left[(1+a)i-a\right]^2$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\ z^2+\left[(1-a)i-a\right]z+a+a^2i=0$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

(3) بين أن المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}$ إذا وفقط إذا كان: $a=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\boxed{\text{II}}$ نفترض أن $a\neq -1$ و $a\neq -i$ و $a\neq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$ ،

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي: a و ai و $a-i$ و $-i$

(1) بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان $\arg(a)\equiv\frac{3\pi}{4}[\pi]$

(2) نفترض أن : $a=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in]-\pi,\pi[$ و $\theta\neq\frac{3\pi}{4}$ و $\theta\neq-\frac{\pi}{2}$

(أ) أكتب العدد $a+1$ على الشكل المثلثي

(ب) نضع $u=\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}\div\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ استنتج العدد u على الشكل المثلثي

(ج) أستنتج أن النقط A و B و C و D متداورة إذا وفقط إذا $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

(3) نفترض أن $a=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(أ) ليكن R الدوران الذي مركزه D ويربط النقطة C بالنقطة B . حدد قياس زاوية الدوران R

(ب) أكتب الصيغة العقدية للدوران R

(ج) حدد لحق A' صورة النقطة A بالدوران R

<u>الحسابيات في $\mathbb{Z}$</u>

في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، نعتبر المعادلة: $11x - 24y = 1$ (E)

1) أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد حلا خاصا للمعادلة (E).

ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

2) أ) ليكن s عددا صحيحا طبيعيا. أثبت أن $10^{s} - 1$ مضاعف للعدد 9.

ب) ليكن الزوج (m,n) حلا للمعادلة (E). بين أن $9 = (10^{11m} - 1) - 10(10^{24n} - 1)$.

3) أ) بين أن $10^{11} - 1$ يقسم $10^{11k} - 1$ مهما يكن العدد الطبيعي k.

ب) استنتج وجود عددين صحيحين M و N بحيث $9 = (10^{11} - 1)M - (10^{24} - 1)N$.

4) أ) بين أن كل قاسم مشترك للعددين $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$ هو قاسم للعدد 9.

ب) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين $10^{24} - 1$ و $10^{11} - 1$.

ليكن a و b عددين نسبيين وغير منعدمين ، $a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(1) بين أنه إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن $a \wedge [b(a+b)] = 1$

(2) نعتبر في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة التالية : $(E): x^2 + y^2 + xy - 31x = 0$

وليكن (x,y) حلا للمعادلة (E) ، نضع $d = x \wedge y$

(أ) بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{N}^{*2}$ و $a \wedge b = 1$ بحيث : $a(31 - da) = bd(a+b)$

(ب) استنتج أن : a يقسم d

(3) (أ) بين أنه يوجد عدد طبيعي c غير منعدم بحيث : $c(a^2 + b^2 + ab) = 31$

(ب) استنتج $c = 1$

(4) استنتج حلول المعادلة (E)

نعتبر المعادلة: $2x - 9y = 17 \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad (E)$

1) ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E)

بين أن: $\begin{cases} x \equiv 4 & [9] \\ y \equiv -1 & [2] \end{cases}$

2) استنتج حلول المعادلة (E)

3) نضع $d = x \wedge y$ حيث (x, y) حل للمعادلة (E)

أ) بين أن: $(9k+4) \wedge (2k-1) = (k+8) \wedge 17$

ب) بين أن: $d = 1$ أو $d = 17$

ج) استنتج حلول النظمة: $\begin{cases} 2x - 9y = 17 \\ x \wedge y = 17 \end{cases}$

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p \geq 5$

نعتبر في المجموعة $IN^* \times IN^*$ المعادلة التالية: $(E): \quad px + y^{p-1} = 2011$

°1) تحقق من أن العدد 2011 أولي

°2) نفترض أن $(x;y)$ حل للمعادلة (E)

أ –بين أن العدد p لا يقسم العدد y

ب –استنتج أن p يقسم العدد 2010 ثم حدد قيم p

ج– حدد الزوج $(x;y)$ في الحالة $p = 67$ (نأخذ: $\sqrt[66]{2011} \approx 1{,}12$)

°3) حل المعادلة (E) في الحالة $p = 5$

---

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(F): 23x - 48y = 1$.

أ– بين أن المعادلة (F) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

ب– باستعمال خوارزمية أقليدس ، حدد حلا خاصا للمعادلة (F).

ج– بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي: $\{(-25 + 48k, -12 + 23k) / k \in \mathbb{Z}\}$.

2) ليكن a و b عدديين صحيحين طبيعيين .

أ– تحقق أن: $(23)^2 \equiv 1[48]$.

ب– بين أنه إذا كان $a^{23} \equiv b[91]$ و أن $a^{48} \equiv 1[91]$ فإن $b^{23} \equiv a[91]$.

3) نعتبر في $\mathbb{N}$ النظمة التالية: $(S): \begin{cases} n \equiv 8[23] \\ n \equiv 9[48] \end{cases}$.

بين أن: $n \equiv 537[1104] \Leftrightarrow n$ حل للنظمة (S)

4) حدد باستعمال مبرهنة فيرما باقي قسمة العدد 3^{48} على 91 .

نعتبر المعادلة $289x - 455y = 13 \quad (E) \quad (x, y) \in \mathbb{Z}^2$

1– أ–بين أن (x,y) حل للمعادلة (E) يستلزم أن x مضاعف ل 13.

ب–نضع x=13k و $k\in\mathbb{Z}$. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $289k\equiv1[35]$ و $k\in\mathbb{Z}$

ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة (E).

ج– حل المعادلة (E) في $\mathbb{Z}^2$.

2–نضع $d=x\wedge y$ حيث (x,y) حل للمعادلة (E)

أ– حدد القيم الممكنة للعدد d .

ب– حدد الحلول (x,y) للمعادلة:(E) بحيث x و y أوليان فيما بينها.

---

1) بين أن 163 عدد أولي

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $13x-162y=1$

3) نعتبر النظمة : $S:\begin{cases}x\equiv a\ [13]\\ x\equiv b\ [162]\end{cases}$ حيث a و b عددان من $\mathbb{Z}$

ا– تحقق أن العدد $x_0=325b-324a$ حل للنظمة (S)

ب– بين أن : $(S)\Leftrightarrow x\equiv x_0[2106]$

ت– حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) في الحالة $a=2$ و $b=3$

4) ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ ونفترض أن : $x^{25}\equiv3[163]$

أ– بين أن $x\wedge163=1$ ثم أن : $x=3^{13}[163]$

ب– استنتج أن $x=3^{13}[163]\Leftrightarrow x^{25}\equiv3[163]$

5) حدد العدد x من IN بحيث: $x^{25}\equiv3[163]$ و $x\leq162$

نعتبر المجموعة A بحيث $A=\{n\in\mathbb{N}\backslash1\leq n\leq36\}$

1 – أ– حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $18x+37y=1$

ب– بين أنه يوجد عنصر وحيد α من A بحيث : $18\times\alpha\equiv1[37]$

2– بين أن : $b\equiv0[37]$ أو $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2 ......ab\equiv0[37]\Rightarrow a\equiv0[37]$

3 –حدد مجموعة الأعداد p من A بحيث : $p^2\equiv1[37]$

4 –أ– بين أن : $(\forall p\in A)(\exists\ q\in\mathbb{Z}) ......p\times q\equiv1[37]$

ب – استنتج أن : $(\forall p\in A)(\exists! q\in A)......p\times q\equiv 1[37]$

5 – بين أن : $36!\equiv -1[37]$

نعبر في المجموعة Z^2 المعادلة التالية : $13x-30y=1$ (E)

1) تحقق أن الزوج $(-23;-10)$ حل للمعادلة (E) .

2) حدد مجموعة حلول المعادلة (E) في Z^2 .

3) استنتج أنه يوجد عدد وحيد x_0 من المجموعة IN أصغر من 20 بحيث $13x_0\equiv 1[30]$.

4) ليكن n من IN . بين أنه إذا كان $n^{13}\equiv p[33]$ و $n^{30}\equiv 1[33]$ فإن $p^7\equiv n[33]$

نعتبر النظمة : $(S):\begin{cases} n\equiv 13\ [19] \\ n\equiv 6\ [12] \end{cases}$.

1)– أ– بين أنه يوجد زوج وحيد (u,v) في $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $19u+12v=1$ (تحديد (u,v)غير مطلوب) .

ب– تحقق أنه من أجل هذا الزوج (u,v) العدد $N=13\times 19u+6\times 12v$ حل للنظمة (S) .

2)– ليكن n_0 حلا للنظمة (S) .

تحقق أن : $(S)\Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv n_0\ [19] \\ n\equiv n_0\ [12] \end{cases} \Leftrightarrow n\equiv n_0[12\times 19]$.

3)– أ– حدد زوجا (u,v) حل للمعادلة : $19u+12v=1$ و أحسب العدد N المرتبط به .

ب– حدد مجموعة حلول النظمة (S) (باستعمال**2)**–) .

4)– n عدد صحيح طبيعي بحيث 6 هو باقي القسمة الأقليدية ل n على 12 و 13 هو باقي القسمة الأقليدية ل n على 19 .

ما هو باقي القسمة الأقليدية ل n على $12\times 19=228$ ؟

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : (E) $2x+5y=1000$ و (F) $2x^2+5y^2=1000$

1) حدد مجموعة حلول المعادلة (E) .

2) ليكن (x_o,y_o) حلا للمعادلة (F) في IN^2 .

أ– بين أن : $x_o\equiv 0[5]$ و $y_o\equiv 0[2]$.

ب– استنتج أن المعادلة : (F_1) $5x^2+2y^2=100$ تقبل حلا (x_1,y_1) في IN^2 .

ج- بين أن : $x_1 \equiv 0[2]$ و $y_1 \equiv 0[5]$

د- استنتج أن المعادلة : $2x^2 + 5y^2 = 10$ (F_2) تقبل حلا في IN^2 .

ه- استنتج أن المعادلة $5x^2 + 2y^2 = 1$ تقبل حلا في IN^2 .

3) ما هي مجموعة حلول المعادلة (F) ؟

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا يخالف 2 .

1) أثبت وجود عدد n من IN^* بحيث : $4^n \equiv 1[p]$

2) نرمز ب q لأصغر عدد من IN^* بحيث : $4^q \equiv 1[p]$ وليكن r باقي القسمة الاقليدية للعدد n على q .

أ- بين أن : $4^r \equiv 1[p]$

ب- استنتج أن $r = 0$ ثم أن q يقسم n .

3) حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم q يحقق $4^q \equiv 1[29]$

نعتبر p عددا صحيحا أوليا حيث $p \geq 5$.

1) أ) برهن أن $3|(2p-1)(p-1)$

ب) استنتج أن $6|(2p-1)(p-1)$

2) ليكن $x \in \mathbb{Z}$ حيث : $1 \leq x \leq p-1$

أ)برهن أن : $(x = p-1)$ أو $(x=1)$ $x^2 \equiv 1[p] \Rightarrow$

ب)نفترض أن: $x \neq 1$ و $x \neq p-1$.بين أنه يوجد y من $\mathbb{Z}$حيث : $x \not\equiv y[p]$ و $xy \equiv 1[p]$

ج)استنتج أن : $(p-1)! \equiv -1[p]$

3) أ) برهن بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) نضع: $S = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{(p-1)^2} = \sum_{k=1}^{p-1} \dfrac{1}{k^2}$.

تحقق من أن : $((p-1)!)^2 \times S \in \mathbb{N}$ ثم أثبت أن $p|((p-1)!)^2 \times S$

نعبر في المجموعة Z^2 المعادلة التالية : $13x - 30y = 1$ (E)

1) تحقق أن الزوج $(-23;-10)$ حل للمعادلة (E) .

2) حدد مجموعة حلول المعادلة (E) في Z^2 .

3) استنتج أنه يوجد عدد وحيد x_0 من المجموعة IN أصغر من 20 بحيث $13x_0 \equiv 1[30]$.

4) ليكن n من IN . بين أنه إذا كان $n^{13} \equiv p[33]$ و $n^{30} \equiv 1[33]$ فإن $p^{7} \equiv n[33]$

---

1) نعتبر المعادلة : $109x - 226y = 1$:(E) بحيث x و y عددين صحيحين نسبيين.

أ) حدد pgcd(109,226) القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226. ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (E)؟

ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الأزواج $(141+226k\ ;\ 68+109k)$ بحيث k عدد صحيح نسبي.

ج) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد غير منعدم d أصغر من أو يساوي 226 وعدد صحيح طبيعي وحيد وغير منعدم e بحيث : $109d = 1 + 226e$ ، مع تحديد قيمتي كل من e و d.

2) بين أن 227 عدد أولي.

3) نضع $A = \{a \in \mathbb{N} / a \leq 226\}$ ، ونعتبر التطبيقين f و g من A نحو A المعرفين بما يلي :

لكل a من A، $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية لـــ a^{109} على 227.

لكل a من A، $g(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية لـــ a^{141} على 227.

أ) تحقق من أن : $g(f(0)) = 0$.

ب) بين أنه لكل عنصر غير منعدم a من A، لدينا $a^{226} \equiv 1\ [227]$.

ج) باستعمال السؤال 1) ب)، استنتج أنه لكل عنصر غير منعدم a من A، لدينا : $g(f(a)) = a$.

ليكن p عددا أوليا بحيث $p \geq 3$.

نضع : $A_p = \{1;2;3;4;5;.........;p-1\}$ وليكن a عنصرا من A_p

1 ــ ا ــ تحقق من ان a^{p-2} حل للمعادلة : $ax \equiv 1[p]$ في $\mathbb{Z}$

ب ــ ليكن r باقي القسمة الأقليدية لـــ a^{p-2} على p . بين ان r هو الحل الوحيد للمعادلة $ax \equiv 1[p]$ في A_p

2 ــ حل في المجموعة A_{29} المعادلتين $2x \equiv 1[29]$ و $3x \equiv 1[29]$

3 ــ برهن على ان : $y \equiv 0[p]$ او $x \equiv 0[p]$ $\Leftrightarrow xy \equiv 0[p]$ لكل x و y من $\mathbb{Z}$

4 ــ حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[29]$

ليكن $n \in IN^*$ نضع $a_n = 4\times 10^n - 1$; $b_n = 2\times 10^n - 1$; $c_n = 2\times 10^n + 1$

1) أ) بين أن a_n ; c_n يقبلان القسمة على 3

ب) بين أن b_3 عدد أولي

ج) بين أن: $\forall n \in IN^*\ ;\ b_n \times c_n = a_{2n}$

د) استنتج تفكيكا إلى جداء عوامل أولية لعدد a_6

2) بين أن : $\forall n \in IN^* \; ; b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ ثم استنتج أن: $\forall n \in IN^* \quad b_n \wedge c_n = 1$

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $(E) : b_3 x + c_3 y = 1$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ليكن n عدداً طبيعيا بحيث $n \geq 9$ نعتبر العددين $a = \overline{1680}^{(n)}$ و $b = \overline{252}^{(n)}$

1) بين أن $n+2 / a \; ; \; n+2 / b$

2) نضع $\alpha = \overline{21}^{(n)}$ و $\beta = \overline{14}^{(n)}$ و $d = \alpha \wedge \beta$

أ -بين أن $d / 7$

ب بين : $7/\beta$ و $7/\alpha \Leftrightarrow 7/n-3$

3) بين أن $(2n+1) \wedge n = 1$

4) حدد $a \wedge b$ حسب قيم n

حساب الاحتمالات

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F .

(كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات)

1) ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات على الأشخاص الستة ؟

2) أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل ؟

3) ما هو احتمال أن يحصل A على كرة واحدة بالضبط و أن يحصل الشخصين B و C معا على كرة واحدة بالضبط .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 .

لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء

و $n-k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

1-احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

يحتوي صندوق على أربع كرات:كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ,نسجل لونها ,ثم نعيدها إلى الصندوق.

نجري نفس التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون

و نوقف التجربة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

1) احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X=2]$ و $[X=3]$

2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ)بين أن احتمال الحدث $[X=2k]$ هو $p_{2k}=\frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

ب)بين أن احتمال الحدث $[X=2k+1]$ هو $p_{2k+1}=\left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

---

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .

الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.

الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.

الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تآنيا

كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1-حدد قيم المتغير العشوائي X

2- أ) بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي $\frac{8}{3n(n-1)}$

ب) بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X

3-علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق U_3 ؟

التحليل

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب: $f(x)=\frac{1}{2(xe^{x}+1)}$

1- أ. بين أن $x+e^{-x}\geq 1$, $\forall x\in\mathbb{R}$، ثم إستنتج D حيز تعريف الدالة f .

ب. أحسب نهايتي f عند محدي D .

2- أ. أحسب $f'(x)$ ثم إعط جدول تغيرات f .

ب. أثبت أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$.

ج. بين أن $4+\left(4x^{2}e^{x}+5x-3\right)\forall x\geq 0, e^{x}$، واستنتج أن : $\forall x\geq 0, |f'(x)|\leq\frac{2}{3}$

د. أنشئ C ،منحنى f في المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

الجزء الثاني

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بمايلي: $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f(u_n)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),0\le u_n\le 1$

2- أثبت أن $(\forall n\in\mathbb{N}),u_n\neq\alpha$

3- بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة .

4- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن: $\forall n\in\mathbb{N},|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{2}{3}|u_n-\alpha|$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

الجزء الثالث

لتكن F الدالة العددية المعرفة بمايلي: $F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$

1- أ. تحقق أن F معرفة على $\mathbb{R}$. و بين أن $\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ 0<f(t)<\frac{1}{2}e^{-t}$

ب. استنتج أن : $\forall x\in]0,+\infty[\ ,\ 0\le F(x)\le\frac{1}{2}xe^{-x}$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

2- أ. بين أن: $\forall x\in]-\infty,-1[\ ,\ F(x)\le\frac{1}{2}x$ و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$.

ب. بين أن: $\forall t\in]-\infty,-1[\ ,0<\dfrac{-te^t}{2(1+te^t)}<-te^t$

ج. استنتج أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(F(x)-\frac{1}{2}x\right)$ و أول هندسيا النتيجة .

د. بين أن F قابلة للإ شتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب $F'(x)$.

نعتبر الدالة العددية $\boldsymbol{g_n}$ للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي: $\boldsymbol{g_n(x)=(1-x)^ne^{-2x}}$

حيث n عدد صحيح طبيعي و $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة $\boldsymbol{g_n}$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

<u>الجزء الأول</u>:

1) أ) احسب نهاية $\boldsymbol{g_n}$ عند يؤول $\boldsymbol{x}$ إلى $-\infty$.

ب) بين أن: $\boldsymbol{lim_{x\to+\infty}\ x^ke^{-2x}=0}$ لكل عدد صحيح طبيعي k و استنتج أن: $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}g_n(x)=0}$

2) درس تغيرات الدالة $\boldsymbol{g_n}$ على $\mathbb{R}$ ثم أعط جدول تغيراتها.(ينبغي دراسة حالتي n زوجي و n فردي.)

3) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$.

ب) بين أن المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر من نقطتين ثابتتين ينبغي تحديدهما.

ج) بين أن محور الأفاصيل مماس لجميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$.

4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $-\infty$.(يمكن كتابة $\frac{\boldsymbol{g_n(x)}}{\mathrm{x}}=x^{n-1}e^{-2x}\times\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$)

5) أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $(\mathcal{C}_0)$ و $(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$.

الجزء الثاني:

لكل n من $\mathbb{N}$ نعتبر التكامل المعرف بما يلي: $\mathbf{I_n} = \int_0^1 g_n(x)\,dx$

1) احسب $\mathbf{I_0}$.

2) ادرس رتابة المتتالية العددية $(\mathbf{I_n})_n$.

3) ادرس إشارة $\mathbf{I_n}$ ثم استنتج أن المتتالية $(\mathbf{I_n})_n$ متقاربة.

4) باستعمال الدالة $x \longmapsto e^{-2x}$ بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq \mathbf{I_n} \leq \frac{1}{n+1}$ واستنتج $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{I_n}$.

5) أ)باستعمال مكاملة بالأجزاء بين العلاقة: $2\,\mathbf{I_{n+1}} = 1 - (n+1)\mathbf{I_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) استنتج طريقة ثانية لتحديد: $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{I_n}$.

ج) احسب النهايتين: $\lim_{n\to+\infty}(n+1)\mathbf{I_n}$ و $\lim_{n\to\infty}(n+2)[1-(n+1)\mathbf{I_n}]$.

6) حدد مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنيين $(\mathcal{C}_0)$ و $(\mathcal{C}_2)$ والمستقيم ذو المعادلة : $x = 2$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 3x^2 + 1 - 2x^2.\ln x$

1) أحسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة g .

3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $]0,+\infty[$

ب- تحقق أن : $4 < a < 5$.

4) حدد اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-1+\ln(x)}{1+x^2}$

1) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بين أن : $(\forall x \in]0,+\infty[);\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f .

3) بين أن : $f(a) = \dfrac{1}{2a^2}$ واعط تأطيرا للعدد f(a) .

4) أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

III) نعتبر الدالة F المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt$

1) أ– بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

ب– بين أن : $F'(x)=\frac{1+\ln x}{1+x^2}$

ج– استنتج تغيرات الدالة F .

2) باستعمال تغيير مناسب للمتغير بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[);F(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}+2Arc\tan x$

IV) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 3}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\int_e^n f(t)dt=\int_e^n \frac{-1+\ln t}{1+t^2}dt$

1) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

2) بين أن : $(\forall n\geq 3);0\leq u_n\leq \frac{n-e}{2a^2}$ (حيث a هو العدد المعرف في السؤال I)3(أ–)

3) أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}$

لتكن f_n الدالة المعرفة]0 , +∞[بما يلي : $f_n(x)=x-n-n\frac{\ln x}{x}$ ، $n\in\mathbb{N}^*$.

(C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (الوحدة 2cm).

A) 1) احسب $f_n'(x)$ ، وبين أن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $g_n(x)=x^2-n+n\ln x$.

2) أ) ادرس تغيرات g_n وحدد نهايتها عند +∞ وفي 0 ، واستنتج أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n

في المجال]0 , +∞[.

ب) حدد إشارة $g_n(x)$ على]0 , +∞[، واستنتج تغيرات f_n .

3) ادرس نهايات f_n عند محدات]0 , +∞[.

4) بين أن المستقيم (Δ_n) ذا المعادلة $y=x-n$ مقارب مائل لــ (C_n) وحدد الوضع النسبي لِــ (C_n) و (Δ_n).

B) نعتبر الدالة h المعرفة على]0 , +∞[بما يلي : $h(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

1) أ) ادرس تغيرات h وحدد نهايتها عند +∞ وفي 0 ، واستنتج أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β بحيث $\frac{1}{e}\leq\beta\leq 1$.

ب) بين أن : $f_n(\beta)=\beta$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

ج) استنتج الوضع النسبي لــ (C_{n+1}) و (C_n).

2) أنشئ في نفس العلم (C_1) و (C_2). (نأخذ $\alpha_1 = 1$ و $1,2 < \alpha_2 < 1,3$ و $-1,24 \le f(\alpha_2) \le -1,10$).

3) أ) بين أن $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x}$.

ب) بين أن المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا هو β.

4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = e^{-v_n} \quad , \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

أ) بين أن : $\frac{1}{e} \le v_n \le 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

ب) بين أن : $|v_{n+1} - \beta| \le e^{-\frac{1}{e}} |v_n - \beta| \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

ج) استنتج أن $(v_n)_{n\ge1}$ متقاربة محددا نهايتها.

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{x + e^x} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1) ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$

2) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

3) ارسم المنحنى (C_f) في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

II) ليكن n من $\mathbb{N}^*$

1) بين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y = n(x-1)$ في نقطة وحيدة أفصولها α_n حيث: $\alpha_n \succ 1$

2) بين أن (α_n) تناقصية.

3) احسب: $\lim \alpha_n$

III) نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$

1) بين أن : $1 - t \le \frac{1}{1+t} \le 1 - \frac{1}{2}t \quad , \quad \forall t \in [0,1]$

2) استنتج أن : $1 - \frac{t}{e^t} \le f(t) \le 1 - \frac{1}{2}\frac{t}{e^t} \quad , \quad \forall t \ge 0$

3) أ) استنتج أنه توجد دالة φ معرفة على $\mathbb{R}^+$ حيث : $x - \varphi(x) \le F(x) \le x - \frac{1}{2}\varphi(x) \quad , \quad \forall x \ge 0$

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء , حدد $\varphi(x)$ بدلالة x

ج) استنتج $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$

4) حدد الفرع اللانهائي لمنحنى F بجوار $+\infty$

5) بين أن : $F(x)\prec x \quad , \quad \forall x\geq 0$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

6) احسب $F'(x) \quad , \quad \forall x\geq 0$ ثم أعط جدول تغيرات F

7) ارسم منحنى F في معلم متعامد ممنظم.

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة بـــما يلي : $g(x)=\ln x-2(1-\frac{1}{x})$

1- أعط جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]4,5[$

(نأخذ $0,6<\ln 2<0,7$ و $1,6<\ln 5<1,7$)

3- احسب $g(1)$ ثم ادرس إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$

4- n عدد من $\mathbb{N}$

- بين أن المعادلة $g(x)=2e^{-\frac{2n}{n+1}}$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $]\alpha,+\infty[$

5- أ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية قطعا

ب- بين أن D متتالية متقاربة ثم أن $\lim u_n=e^2$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[-\{1\}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{(\ln x)^2} \quad ; \quad x\in]0,+\infty[-\{1\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و نرمز بـــ (C) لمنحناها في معلم متعامد ممنظم .

1- أحسب : $\lim_{x\to1^-}f(x)$ و $\lim_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

2- أ- بين أن f متصلة على اليمين في 0

ب - بين أن $\lim_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ و اعط تأويلا هندسيا

3- أ- بين أن إشارة $f'(x)$ على $]0,+\infty[-\{1\}$ هي إشارة $g(x)\ln x$

ب - اعط جدول تغيرات الدالة f

4- ارسم المنحنى (C) (نأخذ $\alpha\simeq 4.5$ و $f(\alpha)\simeq 1.5$) (تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب)

الجزء الثالث :

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بـــما يلي :
$$(\forall x\in]0,+\infty[):\ F(x)=\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{f(t)}{t}dt \quad \text{و} \quad F(0)=\ln 2$$

1- أ- بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[):\ \int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$

ب- تحقق أن : $(\forall x\in]0,+\infty[)(\forall t\in [e^x,e^{2x}]) : \frac{e^x}{t\ln t}\le \frac{1}{\ln t}\le \frac{e^{2x}}{t\ln t}$

ج- استنتج أن : $\lim_{x\to 0^+}\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{\ln t}=\ln 2$

2- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[) : F(x)=\frac{e^x-1}{x}-\frac{e^{2x}-1}{2x}+\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{\ln t}$

ب- استنتج أن F متصلة على اليمين في 0

3- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن :

$$(\forall x\in]0,+\infty[) : F'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

4- أ- بين أن : $(\forall x\in [0,+\infty[) : x+1\le e^x\le xe^x+1$

ب- استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[) : \frac{1}{2}\le F'(x)\le \frac{1}{2}e^{2x}$

ج- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[) : \frac{1}{2}\le \frac{F(x)-F(0)}{x}\le \frac{1}{2}e^{2x}$

د- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أن $F_d'(0)=\frac{1}{2}$

5- أ- بين أن : $(\forall x\in]0,+\infty[) : \int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{t(\ln t)^2}=\frac{1}{2x}$

ب- استنتج أن : $(\forall x\in]0,+\infty[) : F(x)\ge \frac{e^x-1}{2x}$

ج- بين أن : $\lim_{x\to +\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$

6 – ارسم منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم.

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{(\ln x-1)^2} & ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$\boxed{I}$ 1) بين أن مجموعة تعريف الدالة f هي $[0;e[\cup]e;+\infty[$

2) بين أن الدالة f متصلة في0 على اليمين

3) حدد $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا لذالك

4) بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;e[$ و على $]e;+\infty[$ ثم بين أن:

$$(\forall x\in [0;e[\cup]e;+\infty[) \qquad f'(x)=\frac{(\ln x-1)(\ln x-2)}{(\ln x-1)^4}$$

5) أنشئ جدول تغيرات الدالة f

6) بين أن: $f\left([0e[\right) = f\left([0,1[\right)$

7) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $\left(C_f\right)$ مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ ثم أنشئ $\left(C_f\right)$

$\boxed{II}$

نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{e} \\ \left(\forall n\in IN\right) \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) بين أن: $\left(\forall n\in IN\right) \quad u_n \in \left]0;1\right[$

2) بين أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in IN}$ تناقصية

3) استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\in IN}$ متقاربة وحدد نهايتها

$\boxed{III}$

لكل x من $\left]1,e\right[$ نضع: $F(x) = \int_1^x \frac{1}{(1-\ln t)^2}\,dt$ و $I(x) = \int_1^x \frac{1}{1-\ln t}\,dt$

1) بين أن: $F(x) \geq I(x) \quad \left(\forall x \in [1;e[\right)$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن: $I(x) = \dfrac{x^2}{2(1-\ln x)} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}F(x) \quad \left(\forall x \in [1;e[\right)$

3) استنتج أن: $F(x) \geq \dfrac{x^2}{3(1-\ln x)} - \dfrac{1}{3} \quad \left(\forall x \in [1;e[\right)$

4) استنتج النهاية: $\lim\limits_{x\to e^-} F(x)$

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t} e^{-t^2}\,dt \;;\; x \neq 0 \\ f(0) = \ln(2) \end{cases}$$

1-بين أن الدالة f زوجية .

2-أ)بين أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن : $f'(x) = \dfrac{e^{-4x^2}}{x}(1 - e^{3x^2})$

ب)استنتج منحى تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

3-أ)بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^{x}\geq x+1$

ب)استنتج أن : $\left(\forall t>0\right)\ \frac{1}{t}-t\leq\frac{1}{t}e^{-t^{2}}\leq\frac{1}{t}$

ج)بين أن : $\left(\forall x>0\right)\ \ln 2-\frac{3}{2}x^{2}\leq f(x)\leq\ln 2$

د)بين أن f متصلة و قابلة للإشتقاق في 0 .

4-أ) بين أن : $\left(\forall x\geq 1\right)\ 0\leq f(x)\leq\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

ب)استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

5-أ)أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$.

ب)ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

في كل التمرين n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n\left(x\right)=\frac{x}{n}-e^{-nx}$.

ليكن $\left(C_n\right)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.

1) أ ــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n\left(x\right)$.

ب ــ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_n\right)$.

2) أحسب $f'_n\left(x\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

3) أ ــ بين أن المعادلة $f_n\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n .

ب ــ بين أن $f_n\left(\frac{1}{n}\right)<0$.

ج ــ بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ e^{x}\geq x+1$. استنتج أن : $f_n\left(1\right)>0$.

د ـــ بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$.

4) أنشئ المنحنى (C_2) . (نأخذ $\alpha_2 \approx 0,6$)

5) أ ـــ بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر أو يساوي 2 ، لدينا : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$

ب ـــ استنتج أن : $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$.

ج ـــ بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

6) أ ـــ باستعمال السؤال 3) د- ، بين أن : $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$.

ب ـــ استنتج أن : $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$ $\quad (\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$.

ج ـــ حدد $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n$.

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathbf{g(x)} = 1 + \mathbf{(x-1)e^{x}}$

1- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\mathbf{g(x)} \geq 0$

2- بين أن x=0 هو الحل الوحيد للمعادلة g(x)=0

II/ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x) + x)$.

2- بين أن الدالة f متصلة في 0 .

3- أ) احسب $f'(x)$ من اجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

ب) استنتج تغيرات الدالة f .

4- نعتبر التكامل $J(x)=\int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي.

أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $J(x)=e^{-x}(e^x-1-x)$

ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x+|x|}{2}}\leq J(x)\leq \frac{x^2}{2}e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2}e^{\frac{x-|x|}{2}}\leq \frac{e^x-1-x}{x^2}\leq \frac{1}{2}e^{\frac{x+|x|}{2}}$

د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0)=-\frac{1}{2}$

5 – أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x)=\frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2)+2+x\right)$.

ب) ادرس إشارة $e^x(x-2)+2+x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x)\square 0$

د) أنشئ (C) .

III/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفةبما يلي : $u_0=1$ و لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1- بين أن x=ln2 هو الحل الوحيد للمعادلة : f(x)=x .

2-أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$.

ب) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\ln 2|\leq\frac{1}{2}|u_n-\ln 2|$

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

IV/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} F(x)=\int_{x}^{2x}\frac{t}{e^{t}-1}dt\ ;\ x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$

1- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\leq F(x)\leq \frac{x^2}{e^{x}-1}$

ب) بين أن الدالة F متصلة في 0 .

ج) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0)=1$

2 –أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x)=\frac{3-e^{x}}{e^{x}+1}f(x)$.

ب)ادرس تغيرات الدالة F .

I /1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=1+x-e^{-x}$

أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

ب) احسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ وضع جدول تغيرات g .

ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة g(x)=0 .

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$

ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

د) أنشئ (C) .

3- أ) ليكن n من $\mathbb{N}^*$. بين أن المعادلة : $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا x_n في المجال $]0;+\infty[$.

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تناقصية وأنها متقاربة .

ج) أثبت أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

II/ 1− أ) بين أن المعادلة $\mathbf{f(x)=1}$ تكافئ المعادلة $e^{-x} = x$

ب) بين أن المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha = x_1$ وأن : $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$

2− نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $y_1 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}^*; \ y_{n+1} = e^{-y_n}$

أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$

ب) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ ; \ |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$

ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

III/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $F(0) = \frac{1}{2}\ell n 2$ و $\forall x > 0 \ ; \ F(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$

1− أ) بين أن : $\forall t > 0 \ ; \ \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2−أ) بين أن : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2} \qquad (\forall t \geq 0)$

ب) بين أن لكل t من المجال $]0;4[$: $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

ج) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

3−أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$

ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}_+$.

I – لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f(x)=2x-e^{-x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$ و أن $0<\alpha<1$

د) ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$

2) أنشئ المنحنى (C). (نأخذ : $\alpha\approx 0,4$)

II – نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\ ;\ x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

1) أ) بين أن : $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$: $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ (\exists c\in]0,x[)$

ب) استنتج أن : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$

2) أ) بين أن: $g(\alpha)=\displaystyle\int_0^\alpha f(t)dt$

ب) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و أن: $g'(x)=f(x)\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}_+)$

ج) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha,1[$

3) أ) بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر .

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\varphi(x)=e^{-x^2}+\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

ج) بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أن: $\varphi'(x)=-\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\ ;\ (\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$

د) بين أن : $\varphi([0,1])\subset[0,1]$

4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+$ لدينا : $\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\dfrac{x^3}{3}$

ب) بين أن : $\left(\forall x\in\left]0,1\right[\right) ; \left|\varphi'(x)\right|\le\dfrac{2}{3}$

ج) بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right) \;;\; \varphi(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$

5) نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\ge0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\dfrac{2}{3}$ و $u_{n+1}=\varphi(u_n)$; $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)$

أ)بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right) ;\; 0\le u_n\le1$

ب) بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right) \;;\; \left|u_n-\beta\right|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ج) استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\ge0}$متقاربة و حدد نهايتها.

I– نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x} \;;\; x\neq0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر .

2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي: $h_a(x)=\left(\ln(1+2a)-2a\right)x^2-\left(\ln(1+2x)-2x\right)a^2$

أ)احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a بحيث:

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب)استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=-2$.

3) أ)بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I\setminus\{0\}$

و أن: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$; $(\forall x\in I\setminus\{0\})$ حيث: $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب)بين أن : $g(x)<0$; $(\forall x\in I\setminus\{0\})$

ج)استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

4) أ)احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب)بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1,2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$

ج)أنشئ المنحنى (C) (نأخذ : $\alpha\approx1,3$)

II– 1) نضع : $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$.

أ) بين الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I و أن : $0<\varphi'(x)\le\dfrac{2}{3}$; $(\forall x\ge1)$

ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن : $\varphi(J)\subset J$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$; $(\forall n\ge0)$

أ)بين أن : $u_n\in J$; $(\forall n\ge0)$

ب)بين أن : $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n\ge0)$

ج)استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

III–نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ)بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ثم أحسب $F'(x)$

ب)استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال I .

2) أ) بين أن : $F(x)\ge\int_1^x\dfrac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$; $(\forall x\ge1)$

ب) استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ على اليمين في $-\frac{1}{2}$

ونعتبر الدالة F المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي: $\begin{cases} F(x)=F(x)\ ;\ x\in I \\ F\left(-\frac{1}{2}\right)=\ell \end{cases}$

أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x\in I)\ ;\ F(x)-\ell\geq f(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)$

ب) استنتج أن الدالة F غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\frac{1}{2}$

---

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f_n(0)=0$ و $f_n(x)=x(1-\ln x)^n$ من أجل $x>0$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

<u>الجزء الأول</u>

1- أ) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 .(يمكنك وضع $x=t^n$)

ب)ادرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0

ج) حدد النهايات: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f_2(x)}{x}$

2 - أ) ادرس تغيرات الدالة f_1

ب) ادرس تغيرات الدالة f_2

3 - أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2)

ب) أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2). (نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_2))

(نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

ا **الجزء الثاني**

نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ و أن : $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$ $(\forall x<0)$

ب) استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty,0]$

2- أ) بين أن: $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\le F(x)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$ $(\forall x<0)$

ب) تحقق أن الدالة $x\to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$

ج) بين أن: $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

3- نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$. بين أن: $\frac{3}{8}\le\ell\le\frac{3}{4}$

الجزء الثالث

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n=\int_{1}^{e}f_n(x)dx$

1- أ) بين أن : $u_n\ge 0$ $(\forall n\ge 1)$

ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$

ج) بين أن: $u_{n+1}\le u_n$ $(\forall n\ge 1)$

د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ متقاربة

2- أ) بين أن: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n \quad (\forall n\geq 1)$

ب) استنتج بالسنتمتر المربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين (C_1) و (C_2) والمستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$

3- أ) بين أن: $\frac{1}{n+1}\leq u_n\leq\frac{1}{n-1} \quad (\forall n\geq 2)$ (يمكنك استعمال الأسئلة: 1-أ) و 1- ج) و 2- أ))

ب) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$

4- a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $v_1=a$ و $v_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n \quad (\forall n\geq 1)$

و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $d_n=|v_n-u_n|$

أ) بين أن: $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1 \quad (\forall n\geq 1)$

ب) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=+\infty$

ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متباعدة .

I ــ نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1) أ ــ ادرس تغيرات الدالة g

ب ــ ضع جدول تغيرات الدالة g

2) أ ــ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]\ln 4,\ln 6[$

(نأخذ $\ln 2\approx 0,7$ و $\ln 3\approx 1,1$)

ب ــ ادرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$

3)نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=2\left(1-e^{-u_n}\right)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ ــ بين أن $1\leq u_n<\alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب ــ بين أن $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج ــ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

د ــ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

II ــ نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

2) أ ــ تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

ب ــ بين أن $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

3) أنشئ (C) (نأخذ $\alpha\approx 1,5$)

III ــ نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(0)=-\ln 2 \quad \text{و} \quad F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}\,dt \quad (\forall x>0)$$

1) أ ــ باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن: $\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}\,dt-\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=F(x)$ ...

ب ــ بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\dfrac{e^t}{t}\,dt\leq e^{2x}\ln 2$

ج ـــ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر .

2) أ ـــ بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $F(x) \le \frac{1-e^x}{2x}$

ب ـــ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

3) بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : $(\forall x>0)\ F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$

4) أ− ليكن x من المجال $]0,+\infty[$.

بين أنه يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث: $F(x)-F(0) = -\frac{1}{2}xe^{2c}$

(يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين)

ب ـــ أثبت أن لكل x من $]0,+\infty[$: $-\frac{1}{2}e^{2x} \le \frac{F(x)-F(0)}{x} \le -\frac{1}{2}$

ج− استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن $F_d'(0) = -\frac{1}{2}$
