2 ب ع رياضيـــة	النـهـايـات والاتـصـال(1)	ذ: الـرشـــيـــــد

$\arctan\theta \quad \sqrt{b^2-4ac} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overrightarrow{AB} \quad \cos^{-1}\theta \quad e^{i\theta} \quad C_n^p \quad \sqrt{a^2+b^2} \quad \int_b^a f(x)dx \quad \sqrt{x}$

1

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-x^2}{x-\sqrt{x}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^3-2x^2+x}}{1-\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} (2-x)\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2x+7}-5}{x^2-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x}{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$

2

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\sqrt{x^2+3x}+x^2\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{9x+1}-\sqrt{x+1}+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{x+\sqrt{x+1}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

3

أحسب و ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي الموجب a النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a(x+1)+a}{x^3-a^3}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^3+1}-ax}{\sqrt{x-1}-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+x+1}-ax$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^3+ax^2+1}-x\sqrt{x}$

4

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(\cos x)(\cos 2x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\tan(2x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(5x)}{x(x-2)\tan(3x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x\left(\cos(2x)-\cos x\right)}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\tan 2x}}{\sqrt{\tan 3x}-\sqrt{\tan 4x}}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x$

5

أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)....(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$ $\qquad$ ($n\in IN^*$)

6

احسب نهاية الدالة f عند كل من $+\infty$ و 2 : حيث $f(x)=x\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-m\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x}-2}\right)$ و $m\in IR$

7

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1- بين أن : $(\forall x\in]0;+\infty[) \quad f(x)\le x$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

8

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin(x)E\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)E(x)$

9 أدرس اتصال الدالة f في العدد a في كل من الحالتين التاليتين .

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x-2} & ; \quad x>2 \\ f(2)=\dfrac{3}{4} & \\ f(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x-2} & ; \quad x<2 \end{cases} \qquad a=2$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-x^2} & ; \quad x\neq 1 \\ f(1)=-\dfrac{3}{2} & \end{cases} \qquad a=1$$

10 حدد قيمة العددين a و b من IR لكي تكون الدالة f متصلة على IR :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+3x+a}{2-x} & ; \quad x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & ; \quad x\leq 2 \end{cases}$$

11 بين في كل من الحالتين التاليتين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في الصفر و عرف هذا التمديد.

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-E\left(\sqrt{x}\right)}{x-\sqrt{x}} & ; \quad x>0 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+\sin x}-2}{x} & ; \quad x<0 \end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}-\frac{1}{2}\right)$$

12 نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR^* بما يلي : $f(x)=x\left(\frac{1}{x}-E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

1- ا- بين أن : $\left(\forall x\in IR^*\right) \quad |f(x)|\leq |x|$

ب- استنتج أن الدالة f تقبل تمديدا بالتصال في الصفر و عرف هذا التمديد.

2- ليكن n من IN^*

ا- اكتب $f(x)$ بدلالة x و n لكل x من المجال $\left]\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right[$

ب- ادرس اتصال الدالة f على المجال $]0;1[$

13 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال IR بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^3-3x^2 & ; \quad x\leq 1 \\ f(x)=2x^2-4 & ; \quad x>1 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة f متصلة على IR .

2- حدد صور المجالات التالية بالدالة f : $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1]$ و $[0;3]$ و IR

14 لتكن f دالة دورية دورها العدد 1 بحيث :

$$\begin{cases} f(x)=4x-1 & ; \quad 0\leq x\leq \frac{1}{4} \\ f(x)=1-2\sqrt{x} & ; \quad \frac{1}{4}<x\leq 1 \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على IR ثم حدد $f(IR)$

15 لتكن f دالة متصلة على القطعة $\left[\frac{1}{a};a\right]$ بحيث $a>1$. بين أن $\left(\exists c\in\left[\frac{1}{a}:a\right]\right) \quad f(c)=c\,f\left(\frac{1}{c}\right)$

2 ب ع رياضية	النهايات والاتصال (3)	ذ:الرشيد

$\arctan\theta \quad \sqrt{b^2-4ac} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overrightarrow{AB} \quad \cos^{-1}\theta \quad e^{i\theta} \quad C_n^p \quad \sqrt{a^2+b^2} \quad \int_b^a f(x)dx \quad \sqrt{x}$

16 f و g دالتان متصلتان على مجال I بحيث $(\forall x\in I)\ f(x)\neq g(x)$

بين أن : $(\forall x\in I)\ f(x)\rangle g(x)$ أو $(\forall x\in I)\ f(x)\langle g(x)$

17 لتكن f دالة متصلة على المجال $[-1;1]$ بين أن : $(\exists c\in\ ]-1;1[)\ f(c)=\dfrac{2c}{c^2-1}$

18 1- لتكن f دالة عددية متصلة على قطعة $[-1;1]$ بحيث : $f(-1)=f(1)$

بين أن : $(\exists c\in[-1;1])\ f(c)=f(c+1)$

2- ليكن n من $IN^*\setminus\{1\}$ بين أن : $\left(\exists\alpha\in\left]\dfrac{2n}{n+1};2\right[\right)\ \alpha^{n+1}-2\alpha^n+1=0$

19 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;4[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{2-\sqrt{x}}$

1- ادرس اتصال ورتابة الدالة f على المجال $[0;4[$

2- استنتج أن f تقابل من $[0;4[$ نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

20 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;2[$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1-x}$

1- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$

2- أدرس اتصال ورتابة f على المجال $]1;2[$

3- استنتج أن f تقابل من $]1;2[$ نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

21 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال IR بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x} & ; \quad x\rangle 0 \\ f(x)=\sqrt{1-x}-x & ; \quad x\leq 0 \end{cases}$

1- بين أن f متصلة على IR

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3- أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

3- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} المطلوب تحديدها .

22 نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ بمايلي : $f(x)=\sin x$

1- بين أن f تقابل من $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ نحو مجال J يجب تحديده .

2- أنشىء المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$

3- بين أن f^{-1} دالة فردية .

3- نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x)=f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

ا- حدد مجموعة تعريف الدالة g

ب- بين أن : $\left(\forall x\in\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)\ g(x)=2f^{-1}(x)$

$\arctan\theta \quad \sqrt{b^2-4ac} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overrightarrow{AB} \quad \cos^{-1}\theta \quad e^{i\theta} \quad C_n^p \quad \sqrt{a^2+b^2} \quad \int_b^a f(x)dx \quad \sqrt{x}$

23 حل في IR المعادلات التالية :

$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$: (1)

$\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{2}\sqrt{x-1}$: (2)

$\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x(x-1)}+2\sqrt[3]{x-1}=0$: (3)

$\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x-4}=2$: (4)

24 أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{x+4}}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

25 أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^4-2x}-\sqrt[4]{x^3+2x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3(x+1)^{\frac{2}{3}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x-1}\right)$

26 نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x)=\left(x\sqrt{x}-1\right)^3$

1- أعط جدول تغيرات الدالة g

2- بين أن g تقابل من IR^+ نحو مجال J يجب تحديده.

3- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J

27 I- حل و ناقش حسب قيم البارامتر الحقيقي m المعادلة التالية : $(E_m): \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}=m$

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^3-1}}$

1- بين أن : $D_f=]-\infty;-1]\cup]1;+\infty[$

2- أعط جدول تغيرات الدالة f

3- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.

ب- احسب $g^{-1}(x)$ لكل x من J . ماذا تستنتج ؟

28 نعتبر الدالةالعددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+2}-x}{2-x} & ; x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{7}{12} \end{cases}$$

1- حدد مجموعة تعريف الدالة f

2- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3- بين أن الدالة متصلة في العدد 2

4- بين أن : $\left(\exists\alpha\in\,]0;2[\right)\quad f(\alpha)=\dfrac{3+2\sqrt[3]{2}}{9}$

$\arctan\theta \quad \sqrt{b^2-4ac} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overrightarrow{AB}\cos^{-1}\theta \quad e^{i\theta} \quad C_n^p \quad \sqrt{a^2+b^2} \quad \int_b^a f(x)dx \quad \sqrt{x}$

29

أحسب ما يلي :

$\arctan\left(\tan\frac{-29\pi}{5}\right)$ و $\arctan\left(\frac{1}{\tan\frac{3\pi}{8}}\right)$

$\tan\left(\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{3}{5}\right)$ و $\arctan\left(\tan 7\left(Arc\tan\sqrt{3}\right)\right)$

30

1- بين أن لكل x من IR بحيث $|x|<1$ لدينا : $\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)=2\arctan x$

2- بين أن لكل x من IR لدينا : $\arctan x+2\arctan\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\frac{\pi}{2}$

31

حل في IR كلا من المعادلات التالية :

(1) : $\arctan x-2\arctan\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$ (2) : $\arctan 2x+\arctan 3x=\frac{\pi}{4}$

(2) : $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{\pi}{4}$ (3) : $\sin(\arctan x)=\tan(2\arctan x)$

32

1- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$

2- استنتج النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\arctan\sqrt{x^2+2x}}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arctan\left(x-\sqrt{x}\right)}{\arctan x^2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\arctan\sqrt{x-2}}{x^2-2x}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\arctan\left(\sqrt{\tan x}\right)}{\sqrt{\arctan x}}$

33

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arctan\sqrt{x}-Arc\tan\sqrt[3]{x}}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xArc\tan(x)\right)Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)$

34

1- بين أن $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}$

2- ا- استنتج أن : $\arctan 2+\arctan 5+\arctan 8=\frac{5\pi}{4}$

ب- حل في IR المعادلة التالية : $\arctan(x-3)+\arctan(x+3)+\arctan x=\frac{5\pi}{4}$

35

لتكن f الدالة المعرفة على IR^{+*} بما يلي : $f(x)=\sqrt[3]{Arc\tan(x)}-\frac{1}{\arctan(x)}$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\arctan\theta \quad \sqrt{b^2-4ac} \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \overrightarrow{AB}\cos^{-1}\theta \quad e^{i\theta} \quad C_n^p \quad \sqrt{a^2+b^2} \quad \int_b^a f(x)dx \quad \sqrt{x}$

2- بين أن f متصلة و تزايدية قطعا على IR^{+*}

3- ا- بين أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في IR^{+*}

ب- بين أن : $1 < \alpha < \sqrt{3}$ ثم حدد إشارة f على IR^{+*}

36

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt{\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

2- بين أن الدالة f متصلة على D

3- بين أن الدالة $u : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ تناقصية قطعا على D ثم استنتج رتابة f على D

4- ا- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} ينبغي تحديد مجموعة تعريفها J

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

ج- استنتج أن : $f(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}-Arc\tan(x)}$

د- احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x-1}$

37

نعتبر الدالة f المعرفة على IR^{*} بما يلي : $f(x)=\arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$

1- ادرس زوجية f

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

3- لتكن g قصور الدالة f على المجال $]0.+\infty[$

ا- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} ينبغي تحديد مجموعة تعريفها J

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم استنتج تبسيطا ل $g(x)$

ج- استنتج تعبير $f(x)$ على المجال $]-\infty;0[$

38

نعتبر الدالة f المعرفة على IR^{+} بما يلي : $f(x)=\arctan\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- ليكن x من IR^{+} و نضع $\sqrt{x}=\tan\alpha$ حيث $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

أ- تحقق من أن : $\sqrt{x}-\sqrt{x+1}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

ب- استنتج أن : $\left(\forall x\in IR^{+}\right) \quad f(x)=\frac{1}{2}Arc\tan\left(\sqrt{x}\right)-\frac{\pi}{4}$

3- ا- بين أن f تقابل من IR^{+} نحو مجال J المطلوب تحديده .

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J