2026/2027 **Série Exercices** R. MOSAID

Exercice 1

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie par :

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{(x+2)^3-1}}{\boldsymbol{x^2+x}} & \text{si } \boldsymbol{x<-1} \\ \dfrac{\boldsymbol{x-3}}{\boldsymbol{x-1-\sqrt{x+1}}} & \text{si } \boldsymbol{x\geq -1} \text{ et } \boldsymbol{x\neq 3.} \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f(3)=a}$, $(\boldsymbol{a}\in\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\boldsymbol{f}$.
2. Déterminer $\boldsymbol{a}$ pour que $\boldsymbol{f}$ soit continue au point 3.
3. Étudier la continuité de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{-1}$.

Exercice 2

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\boldsymbol{-1}\}$ par :

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{(3-x)|x|}}{\boldsymbol{x^2+x}} & \text{si } \boldsymbol{x\leq 3} \text{ et } \boldsymbol{x\neq 0} \text{ et } \boldsymbol{x\neq -1} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{x^2+2x-15}-3}}{\boldsymbol{2x^2-7x-4}} & \text{si } \boldsymbol{x>3} \text{ et } \boldsymbol{x\neq 4.} \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{f(0)=3}$ et $\boldsymbol{f(4)=a}$.

1. Étudier la continuité de $\boldsymbol{f}$ en 0 et en 3.
2. a) Montrer que pour $\boldsymbol{x>3}$ et $\boldsymbol{x\neq 4}$:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{x+6}}{\boldsymbol{(2x+1)(3+\sqrt{x^2+2x-15})}}$$

   b) Déterminer le réel $\boldsymbol{a}$ pour que $\boldsymbol{f}$ soit continue en 4.

   c) Pour la valeur de $\boldsymbol{a}$ trouvée, montrer que $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\boldsymbol{]3,+\infty[}$.
3. Montrer que l'équation $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{1}{2}}$ admet au moins une solution dans $\boldsymbol{[1,2]}$.

Exercice 3

On considère la fonction $\boldsymbol{g}$ définie par :

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{x^3+x^2+x+1}}{\boldsymbol{x^2+3x-2}} & \text{si } \boldsymbol{x<-1} \\ \boldsymbol{(x+1)E(x)+2} & \text{si } \boldsymbol{-1\leq x<1} \\ \dfrac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{\sqrt{x^2+3}-2}} & \text{si } \boldsymbol{x>1.} \end{cases}$$

1. a) Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)}$ puis déduire que $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{-1}$.

   b) $\boldsymbol{f}$ est-elle continue en 0.
2. a) Montrer que $\boldsymbol{\forall x\in]1,+\infty[: f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}}$.

   b) $\boldsymbol{f}$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
3. a) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est continue sur $\boldsymbol{]1,+\infty[}$.

   b) En déduire que l'équation $\boldsymbol{f(x)=x-1}$ admet dans l'intervalle $\boldsymbol{[2,3]}$ une solution.
4. Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{f(x)-f(-3)}{x+3}}$.

Exercice 4

1. Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur $\boldsymbol{]-\infty,2]\setminus\{1\}}$ par :

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2x^2-3x+2}-1}}{\boldsymbol{x-1}}.$$

   a) Montrer que $\boldsymbol{f}$ est prolongeable par continuité en 1.

   b) Soit $\boldsymbol{F}$ le prolongement par continuité de $\boldsymbol{f}$ en 1. Montrer que $\boldsymbol{F}$ est continue sur $\boldsymbol{]-\infty,2]}$.
2. Soit $\boldsymbol{g}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{1-2x}}{\boldsymbol{\sqrt{2x^2-3x+2}+1}} & \text{si } \boldsymbol{x\in]-\infty,2]} \\ \dfrac{\boldsymbol{x^3+x^2-12x+12}}{\boldsymbol{x^2-4}} & \text{si } \boldsymbol{x\in]2,+\infty[.} \end{cases}$$

   a) Calculer $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)}$.

   b) $\boldsymbol{g}$ est-elle continue en 2 ?