

Exercice 1 (Les questions I, II, III et IIII sont indépendantes) (7 pts)

I. Calculer les limites suivantes :

(2.5)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1} - 3x$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-8x^3 - 3x^2 + 1} + 2x$

II. Résoudre dans $\mathbb{R}$ ce qui suit : a) $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{4}$; b) $\sqrt[5]{7x+11} < 2$

(1.5)

III. Soit la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt[3]{8x+19}-3}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ g(1) = \frac{8}{27} \end{cases}$$

(a) Déterminer D_g le domaine de définition de g .

(0.5)

(b) Montrer que g est continue en $x_0 = 1$.

(1.5)

IV. Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) \neq f(1)$.

Montrer $\exists c \in [0; 1] \quad 2024f(c) + 2025f(1-c) = 4049f(\sqrt[3]{c})$

(1)

Exercice 2 (5.5 pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + 3x - 3$

1. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

(1.5)

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.

(0.5)

3. Vérifier que : $0 < \alpha < 1$; puis montrer que $\sqrt[3]{3-3\alpha} = \alpha$

(1.5)

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^3 - 3 < -3x$

(1)

5. On considère la fonction h définie par :
$$\begin{cases} h(x) = g(x) + \alpha & ; \quad x \leq \alpha \\ h(x) = \sqrt[3]{3-3x} & ; \quad x > \alpha \end{cases}$$

Montrer que h est continue en α .

(1)

Exercice 3 (7.5 pts)

On considère la fonction f définie sur $[3; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 - 4\sqrt{x-3}$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(1)

2. Étudier la continuité de f sur $]3; +\infty[$.

(0.5)

3. Étudier la dérivabilité de f à droite en 3, puis interpréter le résultat graphiquement.

(1.5)

4. (a) Montrer que pour tout $x \in [3; +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-7}{\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}+2)}$

(1)

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[3; +\infty[$.

(0.5)

5. Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [7; +\infty[$.

(a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

(1)

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1} .

(0.5)

(c) Vérifier que : $g(x) = (\sqrt{x-3}-2)^2$ puis déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

(1.5)