

Exercice 1 (14 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} & ; \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et (C_f) la Courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que f est continue en 0.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- En utilisant le théorème des accroissements finis ; montrer que :

$$(\forall x \in]-\infty; 0[); \quad x < \arctan(x) < \frac{x}{1+x^2}.$$
- Étudier le dérivabilité de f en 0, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
- (a) Montrer pour tout $x \in [0; +\infty[; \quad f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(3\sqrt[3]{x} + 1)}{\sqrt[3]{x^2}}$
 (b) Montrer que f est croissante sur $] -\infty; 0[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
- étudier les branches infinies de (C_f) ; puis Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$
 (a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
 (b) Calculer $g(8)$; puis montrer que g^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(g^{-1})'(3)$.
- On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3} - f\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x^2}{9}A$
 où A est un réel qui vérifie $h(1) = 0$
 (a) En utilisant le théorème de Rolle , montrer que : $(\exists c \in [0; 1]) : \quad f'(c) - f'\left(\frac{c}{3}\right) = \frac{2}{3}cA$
 (b) En utilisant le théorème des accroissements finis ; déduire que : $(\exists b \in [0; 1]) : \quad f''(b) = A$

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(1+x)$

- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a dans $\mathbb{R}$, tel que : $1 < a < 2$
- Montrer que : $(\forall x \in [1; 2]); \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$
- Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

 (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 < U_n < 2$; puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{5}|U_n - a|$
 (b) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite