

Partie A

On considère la fonction $g(x) = x^3 + x^2 + 3x - 1$.

1. Étudier et dresser le tableau de variations de g (0,5pt)
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α (0,25pt)
3. Vérifier que $\alpha \in]0; 1[$ puis donner le signe de g (0,5pt)

Partie B

Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x^2 + 3x + 2|} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1. Déterminer D_f , l'ensemble de définition de f (0,5pt)
2. Écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue puis calculer les limites de f aux bornes de D_f (01 pt)
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 (01pt)
4. Interpréter géométriquement les résultats. (0,5pt)
5. Étudier la dérivabilité de f en -2 (0,75pt)
6. Montrer que $(D) : y = x$ est une asymptote oblique à C_f en $+\infty$ (0,25pt)
7. Étudier la position de (C_f) par rapport à la droite (D) (0,25pt)
8. Étudier la branche infinie de la courbe (C_f) en $-\infty$ (0,25pt)
9. Étudier sur $] -\infty; -2[$ la position relative de (C_f) par rapport à $(\Delta) : y = -x - \frac{3}{2}$ (0,5 pt)
10. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère. (0,5pt)
11. Montrer que f est dérivable sur $[-1; +\infty[$ et que $\forall x \in [-1; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{(x-1)g(x)}{(x^2+1)^2}$. . (0,75pt)
12. Calculer la dérivée f' de f sur les autres intervalles où f est dérivable. (0,75 pt)
13. Dresser le tableau de variations complet de f (0,5 pt)
14. Soit g la restriction de f à $[-2; -1]$ et C_g sa courbe représentative.
Montrer que la droite $(D') : x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de C_g (0,25pt)
15. Tracer C_f et ses asymptotes dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (0,5pt)

Partie C

On considère maintenant h la restriction de f à l'intervalle $I =] -\infty; -2[$

1. Montrer que h réalise une bijection entre I et un intervalle J à préciser. (0,25pt)
2. Sa réciproque h^{-1} est-elle dérivable sur J ? (0,25pt)
3. Calculer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$ (0,5pt)
4. Dresser le tableau de variation de h^{-1} (0,5pt)
5. Tracer $(C_{h^{-1}})$ courbe de h^{-1} dans le même repère. (0,5pt)

﴿وَقَالُوا اتَّخَذَ الرَّحْمَنُ وَلَدًا﴾ (88) • لَقَدْ جِئْتُمْ شَيْئًا إِدًّا (89) • تَكَادُ السَّمَوَاتُ يَتَفَطَّرْنَ مِنْهُ وَتَنْشَقُّ الْأَرْضُ وَخَرُّوا سُجَّدًا (90) •
 أَنْ دَعَوْا لِلرَّحْمَنِ وَلَدًا (91) • وَمَا يَنْبَغِي لِلرَّحْمَنِ أَنْ يَتَّخِذَ وَلَدًا (92) • إِنْ كُلُّ مَنْ فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ إِلَّا آتِيَ الرَّحْمَنِ عَبْدًا
 (93) • لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا (94) • وَكُلُّهُمْ عِندَهُ يَوْمَ الْقِيَمَةِ فَرْدًا (95) • ﴿مريم الآيات 88-95﴾