الاشتقـــاق

I- الاشتقـــاق في نقطة :

1- العدد المشتق :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.

العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 ونرمز له بالرمز $f'(x_0)$ ونكتب $f'(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$.

ملاحظة :

$$f'(x_0)=\lim_{x \to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$ (يكفي وضع $h=x-x_0$)

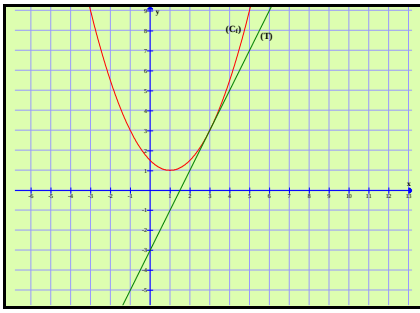
مثال :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2+3$

بين إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=1$ محددا العدد المشتق في هذه النقطة.

2- التأويل الهندسي للعدد المشتق - معادلة المماس لمنحنى دالة :

خاصية وتعريف :



لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0.

- المستقيم (T) ذو المعادلة $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ هو مماس لـ (C_f) منحنى الدالة f في النقطة $A(x_0;f(x_0))$.

- الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $g(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0 .

-العدد $g(x)$ هو التقريب التآلفي للعدد $f(x)$ بجوار x_0 .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{x}$.

1) حدد العدد المشتق للدالة f في النقطة 16 .

2) حدد الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة 16 .

3) استنتج التقريب التآلفي للعدد $\sqrt{17}$.

II- الاشتقـــاق على اليمين والاشتقاق على اليسار :

1) تعاريف :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[x_0;b[$ حيث $x_0<b$.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.

العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق على اليمين للدالة f في النقطة x_0 ونرمز له بالرمز $f_d'(x_0)$ ونكتب :

$$f_d'(x_0)=\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{h \to 0^+}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$.

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;x_0]$ حيث $a<x_0$.

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا وجد عدد حقيقي ℓ بحيث $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}}\left(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\ell$.

العدد الحقيقي ℓ يسمى العدد المشتق على اليسار للدالة f في النقطة x_0 ونرمز له بالرمز $f_g'(x_0)$ ونكتب :

$$f_g'(x_0)=\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\lim_{h \to 0^-}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)$$

خاصية :

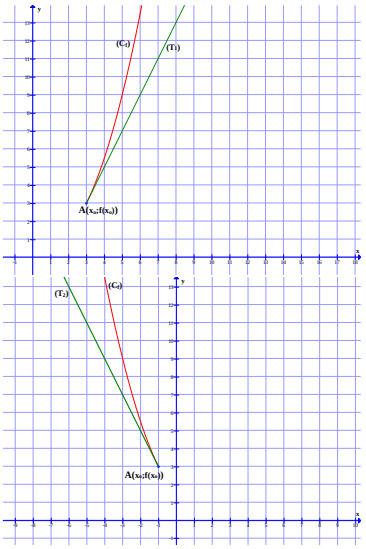
لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
(f قابلة للاشتقاق في x_0) يكافئ (f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 و $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$)

مثال :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = |x|$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

2) التأويل الهندسي - نصف مماس لمنحنى دالة :



أ) لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 ، نصف المستقيم (T_1) ذو المعادلة :

$\begin{cases} y = f_d'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \geq x_0 \end{cases}$ هو نصف مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو $f_d'(x_0)$

ب) لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 ، نصف المستقيم (T_2) ذو المعادلة :

$\begin{cases} y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ x \leq x_0 \end{cases}$ هو نصف مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ معامله الموجه هو $f_g'(x_0)$

III – الدالة المشتقة لدالة عددية :

1) الاشتقاق على مجال :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I .
نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقط المجال I .

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;b]$.
نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a;b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b

ملاحظة : بنفس الطريقة نعرف قابلية الاشتقاق على المجال : $]a;b]$ وكذلك على المجال $[a;b[$.

2) الدالة المشتقة :

تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I .
الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز f' والمعرفة كما يلي : $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$.

ملاحظة :

$$\forall x \in I : \quad f'(x) = \lim_{t \to x} \left(\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right)$$

مثال : حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالات التالية :

$f(x) = 5$ ، $f(x) = -3x$ ، $f(x) = x^2 + x$.

3) الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية :

تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
- إذا كانت الدالة المشتقة f' قابلة للاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f على I ، ونرمز لها بالرمز f'' ، ونقول إن f قابلة للاشتقاق مرتين على I .
- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق n مرة على المجال I $(n \geq 1)$ فإننا نرمز للدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f بالرمز $f^{(n)}$ وتحقق : $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)} \right)'$

مثال :

حدد الدالة المشتقة الثانية للدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^3$

4) الدوال المشتقة لدوال اعتيادية :

$f(x)$	مجموعة تعريف f	$f'(x)$	مجموعة تعريف f'
a $\quad (a\in\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
x^n $\quad (n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\})$	$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$

5) الدوال المشتقة والعمليات :

خاصية :

لتكن u و v دالتين عدديتين قابلتين للاشتقاق على مجال I ، و k عدد حقيقي ، لدينا :

الدالة المعرفة بـ $f(x)=u(x)+v(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=u'(x)+v'(x)$

الدالة المعرفة بـ $f(x)=u(x)v(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

الدالة المعرفة بـ $f(x)=k.u(x)$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=k.u'(x)$

وإذا كان $\forall x\in I:\ v(x)\neq 0$ فإن :

الدالة المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

الدالة المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $\forall x\in I:\ f'(x)=\dfrac{-v'(x)}{(v(x))^2}$

نتائج :

كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها .

تمرين تطبيقي :

أدرس قابلية اشتقاق ثم أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=(3x-2)(x^2+4x)$ و $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ و $f(x)=\tan(x)$

6) مشتقات الدوال u^n و $u(ax+b)$ و $\sqrt{u}$:

خاصية :

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I ، و a و b عددين حقيقيين و J مجموعة الأعداد x بحيث $(ax+b)\in I$ ، لدينا :

- الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=(u(x))^n$ (حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $u\neq 0$ على I إذا كان n سالبا) قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x\in I:\ f'(x)=n\times u'(x)\times(u(x))^{n-1}$$

- الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا :

$$\forall x\in I:\ f'(x)=a\times u'(ax+b)$$

- إذا كانت $\forall x\in I\ \ u(x)>0$ فإن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا :

$$\forall x\in I:\ f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

تمرين تطبيقي :

أدرس قابلية اشتقاق ثم أحسب مشتقة الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$f(x)=(x^2+3)^5$ ، $f(x)=\sin(2x-1)$ و $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

IV- تطبيقات الدالة المشتقة :

1) رتابة دالة وإشارة مشتقتها :

خاصية :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I .
تكون f تزايدية على المجال I إذا وفقط إذا كان $\forall x \in I : \ f'(x) \geq 0$
تكون f تزايدية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان $\forall x \in I : \ f'(x) > 0$ مع امكانية نعدام f على نقط منعزلة من I
تكون f تناقصية على المجال I إذا وفقط إذا كان $\forall x \in I : \ f'(x) \leq 0$
تكون f تناقصية قطعا على المجال I إذا وفقط إذا كان $\forall x \in I : \ f'(x) < 0$ مع امكانية نعدام على نقط منعزلة من I
تكون f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كان $\forall x \in I : \ f'(x) = 0$

تمرين تطبيقي :

باستعمال الاشتقاق ، أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

2) مطاريف دالة قابلة للاشتقاق :

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$.
إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 وتقبل مطرافا في النقطة x_0 فإن $f'(x_0) = 0$

ملاحظة :

إذا كان $f'(x_0) = 0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن f تقبل مطرافا في النقطة x_0 ، مثال : الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3$
لدينا $f'(0) = 0$ و لكل $x > 0$ لدينا $f(-x) < f(0) < f(x)$ ن إذن $f(0)$ ليس بقيمة قصوى ولا قيمة دنيا للدالة f .

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$ ،
إذا انعدمت f' في x_0 مغيرة إشارتها بجوار x_0 فإن $f(x_0)$ مطراف للدالة f .

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب نهاياتها عند محدات D_f .
2) أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.
3) استنتج أن العدد 2 قيمة قصوى لـ f وأن $\dfrac{2}{3}$ قيمة دنيا لـ f .

V- المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$:

تعريف :

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم ،
المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية ، تسمى معادلة تفاضلية .
كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ وتحقق المتساوية $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل عدد x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$.

نشاط :

لتكن f و g الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = \cos 2x$ و $g(x) = \sin 2x$
1) تحقق من أن كل من f و g حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.
2) بين أن كل دالة على شكل $x \mapsto \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ (حيث α و β من $\mathbb{R}$) هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

خاصية :

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم ،
الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال f المعرفة كما يلي : $f(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ حيث α و β من $\mathbb{R}$

ملاحظة :

حل المعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ يعني تحديد الحل العام لهذه المعادلة.

تمرين تطبيقي :

حل المعادلة التفاضلية $4y'' + y = 0$