نهاية دالة عددية

I– نهاية لا منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

نشاط :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=2x$

1) تأمل الجدول التالي ثم املأ الفراغ :

x	1	5	10	200	1000	10000	$\rightarrow$	$+\infty$
$f(x)$							$\rightarrow$	

2) تأمل جيدا الجدول التالي ثم املأ الفراغ :

x	-1	-4	-10	-500	-2000	-10000	$\rightarrow$	$-\infty$
$f(x)$							$\rightarrow$	

1) تعاريف :

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

- إذا كان $f(x)$ يأخذ قيما (موجبة) كبيرة أكثر فأكثر عندما يكبر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- إذا كان $f(x)$ يأخذ قيما (سالبة) صغيرة أكثر فأكثر عندما يكبر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$ حيث $a\in\mathbb{R}$.

- إذا كان $f(x)$ يأخذ قيما (موجبة) كبيرة أكثر فأكثر عندما يصغر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ هي $+\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

- إذا كان $f(x)$ يأخذ قيما (سالبة) صغيرة أكثر فأكثر عندما يصغر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ هي $-\infty$ ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2) نهايات اعتيادية :

خاصية مقبولة :

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم ، لدينا النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ إذا كان n زوجي

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ إذا كان n فردي

II– نهاية منتهية لدالة عند $+\infty$ أو $-\infty$:

1) تعاريف :

تعريف 1 :

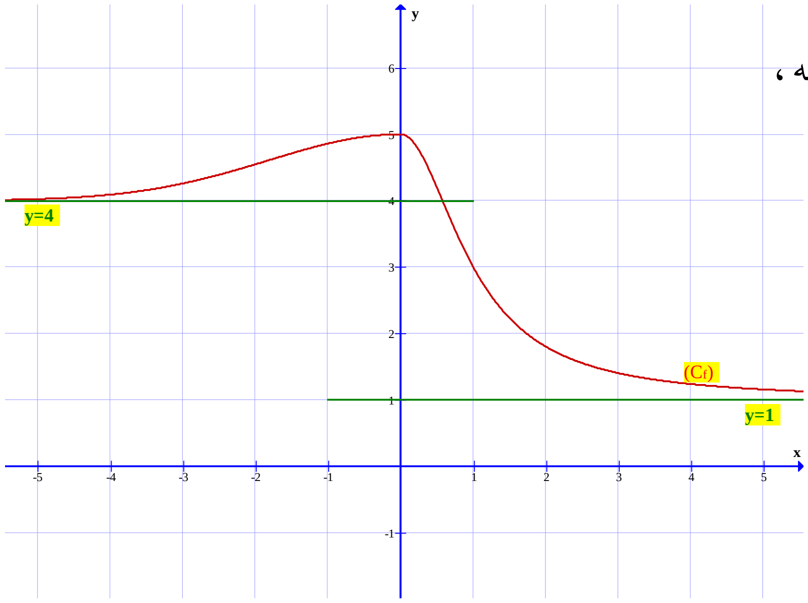
- لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$ وليكن ℓ عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يكبر x أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$

تعريف 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]-\infty;a]$ حيث $a\in\mathbb{R}$ وليكن ℓ عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يكبر $-x$ أكثر فأكثر فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$



أمثلة :

نعتبر الدالة f التي منحناها كما في الشكل جانبه ،

أحسب مبيانيا النهايتين :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

الحل :

نلاحظ أن :

- عندما يقترب x من $+\infty$ فإن $f(x)$ يقترب من 1 إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$
- عندما يقترب x من $-\infty$ فإن $f(x)$ يقترب من 4 إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$

نهايات اعتيادية :

خاصية 1 :

لدينا النهايات التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^* :\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}^* :\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية و ℓ عددا حقيقيا .

- إذا كانت f تقبل نهاية ℓ في $+\infty$ أو $-\infty$ فإن هذه النهاية وحيدة .
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ يكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ell\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$ يكافئ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\ell\right)=0$

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x^2+x}{x^2}$

بين أن : $f(x)=3+\dfrac{1}{x}$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$ ، ثم أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

الحل :

- لكل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f(x)=\dfrac{3x^2+x}{x^2}=\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}=3+\dfrac{1}{x}$
- نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}-3\right)=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3\right)=0$

وحسب الخاصية (2) السابقة نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$.

III– النهاية المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة :

1) نهاية منتهية لدالة في نقطة :

تعريف :

- ليكن I مجالا مفتوحا مركزه x_0 و f دالة عددية معرفة على $I\setminus\{x_0\}$ و ℓ عددا حقيقيا .

إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى x_0 هي ℓ ونكتب $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$

خاصية :

لتكن f دالة عددية و x_0 و ℓ عددا حقيقيا .
- إذا كانت f تقبل نهاية ℓ في x_0 فإن هذه النهاية وحيدة .

2) نهايات اعتيادية :

خاصية مقبولة :

ليكن a عددا حقيقيا ، لدينا النهايات التالية :

$\lim_{x \to a} x = a$ $\quad$ $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$ $\quad$ $\lim_{x \to a} x^3 = a^3$ $\quad$ $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

3) نهاية لامنتهية لدالة في نقطة :

تعريف :

ليكن I مجالا مفتوحا مركزه x_0 و f دالة عددية معرفة على $I \setminus \{x_0\}$ و ℓ عددا حقيقيا .
- إذا كان $f(x)$ يأخذ قيما (موجبة) كبيرة أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية فإننا نقول إن :
نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى x_0 هي $+\infty$ ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
- إذا كان $f(x)$ يأخذ قيما (سالبة) صغيرة أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية فإننا نقول إن :
نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى x_0 هي $-\infty$ ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

IV– النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة :

1) النهاية على اليمين لدالة في نقطة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]x_0;a[$ حيث $x_0 < a$ و ℓ عددا حقيقيا .
- إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أكبر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليمين عند x_0 هي ℓ ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$ أو $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.
- إذا كان $f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أكبر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليمين عند x_0 هي $+\infty$ ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.
- إذا كان $-f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أكبر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليمين عند x_0 هي $-\infty$ ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

2) النهاية على اليسار لدالة في نقطة :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;x_0[$ حيث $x_0 > a$ و ℓ عددا حقيقيا .
- إذا كان $f(x)$ يقترب أكثر فأكثر من العدد ℓ عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أصغر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليسار عند x_0 هي ℓ ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$ أو $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.
- إذا كان $f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أصغر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليسار عند x_0 هي $+\infty$ ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.
- إذا كان $-f(x)$ يكبر أكثر فأكثر عندما يقترب x من x_0 بما فيه الكفاية بقيم أصغر من x_0 فإننا نقول إن نهاية $f(x)$ على اليسار عند x_0 هي $-\infty$ ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

3) نهايات اعتيادية :

خاصية مقبولة :

ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم ، لدينا النهايات التالية :

$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0$ ، $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$

$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ ، $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$ ، $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=+\infty$ (إذا كان n زوجيا) ، $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^n}=-\infty$ (إذا كان n فرديا)

4) مبرهنة :

لتكن f دالة عددية و x_0 و ℓ عددين حقيقيين .

- $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$ يكافئ $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell$
- $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ يكافئ $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$
- $\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ يكافئ $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$

تمرين تطبيقي :

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $\begin{cases} f(x)=x^2 ; x\le 1 \\ f(x)=\frac{1}{x} ; x>1 \end{cases}$

أحسب النهاية : $\lim_{x\to1}f(x)$

2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بـ : $f(x)=\frac{|x|}{x}$

أدرس نهاية f عند العدد $x_0=0$.

الحل :

1) حساب النهاية $\lim_{x\to1}f(x)$: لدينا $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$ و $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1^2=1$

وبما أن $\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=1$ فإن : $\lim_{x\to1}f(x)=1$

2) لدينا $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=1$ و $\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}}=-1$

وبما أن $\lim_{x\to0^-}f(x)\neq\lim_{x\to0^+}f(x)$ فإن : الدالة f لا تقبل نهاية عند العدد 0 .

V- العمليات على النهايات :

ليكن x_0 و ℓ و ℓ' ثلاثة أعداد حقيقية .

1) النهاية والجمع :

نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
نهاية $f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

ش غ م : شكل غير محدد، ويعني أن النهاية موجودة لكن لا يمكن استنتاجها مباشرة، ويلزم تطبيق تقنيات أخرى لتحديدها.

2) النهاية والجداء :

نهاية f	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
نهاية g	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
نهاية $f.g$	$\ell.\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ش غ م

3) النهاية والمقلوب :

نهاية f	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
نهاية $\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

4) النهاية والخارج :

نهاية f	ℓ	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$\pm\infty$	0
نهاية g	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	0
نهاية $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ش غ م	

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x^2 - x\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -1}\frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 3^-}\frac{-1}{x-3} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 3^+}\frac{-1}{x-3} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 2^+}\frac{x-1}{2-x}$$

الحل :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x^2 - x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(x(x-1)\right) = (+\infty)\times(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \to -1}(x-1) = -1-1 = -2$$

$$\lim_{x \to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x \to 4}\frac{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \to 4}\left(\sqrt{x}+2\right) = \sqrt{4}+2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+}\frac{x-1}{2-x} = \frac{2-1}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 3^+}\frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to 3^-}\frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

5) نهاية دالة حدودية – نهاية دالة جذرية :

خاصية :

- لتكن P و Q دالتين حدوديتين و x_0 عددا حقيقيا ، لدينا :

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad (\text{إذا كان } Q(x_0) \neq 0)$$

- إذا كان : $P(x) = a_n x^n + \dots\dots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n \neq 0$ و $Q(x) = b_m x^m + \dots\dots + b_1 x + b_0$ حيث $b_m \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \to +\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to 2}\left(1 + x - 3x^2\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty}\left(2x^5 + 3x^3 + 5\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty}\left(-3x^4 + 2x^2\right)$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \to +\infty}\left(x^7 - x^2 + 2\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty}\left(-4x^5 + 8x - 1\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty}\frac{-3x^4 + x^2 + 5}{8x^7 - x^4 - x^2}$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \to +\infty}\frac{4x^5 - x^3 + x^2}{2x^5 - x^4 - 7} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty}\frac{2x^8 - x^3 + x^2}{3x^5 - x^4 - 7} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty}\frac{2x^3 - 5x^3 + x^2}{3x^4 + x^5 - 6}$$

الحل :

$$\lim_{x\to 2}\left(1+x-3x^2\right)=1+2-3\times 2^2=3-12=-9$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(2x^5+3x^3+5\right)=\lim_{x\to -\infty}2x^5=2\lim_{x\to -\infty}x^5=2\times(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-3x^4+2x^2\right)=\lim_{x\to -\infty}-3x^4=-3\lim_{x\to -\infty}x^4=-3\times(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x^7-x^2+2\right)=\lim_{x\to +\infty}x^7=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(-4x^5+8x-1\right)=\lim_{x\to +\infty}-4x^5=-4\lim_{x\to +\infty}x^5=-4\times(+\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^4+x^2+5}{-x^2-x^4+8x^7}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^4}{8x^7}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3}{8x^3}=\frac{-3}{8}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{-3}{8}\times 0=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^5-x^3+x^2}{2x^5-x^4-7}=\lim_{x\to +\infty}\frac{4\cancel{x^5}}{2\cancel{x^5}}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^8-x^3+x^2}{3x^5-x^4-7}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^8}{3x^5}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3}{3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to -\infty}x^3=\frac{2}{3}\times(-\infty)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3-5x^3+x^2}{3x^4+x^5-6}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^3+x^2}{3x^4+x^5-6}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3x^3}{x^5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-3}{x^2}=-3\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=-3\times 0=0$$

VI- نهايات الدوال اللاجذرية :

خاصية 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة وموجبة على مجال $[a;+\infty[$ حيث $a\in\mathbb{R}$:

- إذا كان : $\lim_{x\to +\infty}f(x)=\ell$ فإن : $\ell\geq 0$ و $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$
- إذا كان : $\lim_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

خاصية 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة وموجبة على مجال $]-\infty;a]$ حيث $a\in\mathbb{R}$:

- إذا كان : $\lim_{x\to -\infty}f(x)=\ell$ فإن : $\ell\geq 0$ و $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$
- إذا كان : $\lim_{x\to -\infty}f(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$

خاصية 3 :

لتكن f دالة عددية معرفة وموجبة على مجال $]a;b[$ حيث $a;b\in\mathbb{R}$ و $x_0\in]a;b[$:

- إذا كان : $\lim_{x\to x_0}f(x)=\ell$ فإن : $\ell\geq 0$ و $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$
- إذا كان : $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=+\infty$

ملاحظة :

الخاصية السابقة تبقى صالحة عندما يؤول x إلى x_0 على اليمين أو عندما يؤول x إلى x_0 على اليسار .

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 8}\sqrt{3x+1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2+1}} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2+1}+x \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-3x\right)$$

الحل :

$$\lim_{x\to 8}\sqrt{3x+1}=\sqrt{25}=5$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2+x+1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=4$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4x^2+x+1}{x^2+1}}=\sqrt{4}=2$

نعلم أن $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{1}{x}}=+\infty$ و بما أن $\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ لكل $x>0$ فإن $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{1}{(+\infty)-(-\infty)}=\frac{1}{(+\infty)+(+\infty)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}{x}\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{\cancel{x}}=\sqrt{1+0}+1=2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+3\right)=(-\infty)\times\left(-\sqrt{1+0}+3\right)=(-\infty)\times2=-\infty$$

VII- نهايات الدوال المثلثية :

خاصيات :

ليكن x_0 عددا حقيقيا لدينا :

$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\tan x=\tan x_0$ (إذا كان $x_0\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$)

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x-2}{x^2}$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\tan(3x)}$

الحل :

نضع $t=2x$ ، عندما يؤول x إلى 0 فإن t يؤول إلى 0 كذلك ،

إذن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(2\times\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=2\times\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)=2\times1=2$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\cos x-2}{x^2}=\lim_{x\to0}(-2)\times\frac{1-\cos x}{x^2}=-2\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=-2\times\frac{1}{2}=-1$$

نضع $t=3x$ ، عندما يؤول x إلى 0 فإن t يؤول إلى 0 كذلك ،

إذن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\tan(3x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{3}\times\frac{3x}{\tan(3x)}=\frac{2}{3}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{t}{\tan(t)}=\frac{2}{3}\times\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\left(\frac{\tan(t)}{t}\right)}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{1}=\frac{2}{3}$

VIII- النهايات و الترتيب :

خاصيات :

لتكن f و g و h ثلاث دوال معرفة على مجال $I=[a;+\infty[$ ، حيث $a\in\mathbb{R}$ و ℓ عددا حقيقيا ،

- إذا كان $\forall x\in I:f(x)\le g(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
- إذا كان $\forall x\in I:f(x)\le g(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
- إذا كان $\forall x\in I:|f(x)-\ell|\le g(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$.
- إذا كان $\forall x\in I:f(x)\le g(x)\le h(x)$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\ell$.

ملاحظة :

الخاصيات السابقة تبقى صالحة عندما يؤول x إلى $-\infty$، أو إلى عدد x_0، أو إلى عدد x_0 على اليمين، أو إلى عدد x_0 على اليسار .

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\cos x)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

الحل :

- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\cos x)$:

نعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ -1\le\cos x$ ، إذن $(*)\quad \forall x\in\mathbb{R}: x-1\le x+\cos x$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty \quad (**)$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\cos x)=+\infty$

- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$:

نعلم أن $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ -1\le\sin x\le1$ ، إذن بالخصوص $\forall x>0\ :\ -1\le\sin x\le1$

إذن $\forall x>0\ :\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}\quad(*)$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\quad(**)$

إذن من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

- حساب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$:

نضع $t=\dfrac{1}{x}$ ، عندما يؤول x إلى $+\infty$ فإن t يؤول إلى 0 .

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=1$$