

Séried d'exercice N 7

la limite d'une fonction numérique

Exercice 1

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow 4} 3x^2 - 8x - 9$
- $\lim_{x \rightarrow 2} 4x^3 - 2x + 11$
- $\lim_{x \rightarrow -5} 4x^2 + 6x + 5$
- $\lim_{x \rightarrow -7} 2x^2 + 7x - 3$

Exercice 2

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^3 + 2x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^5 - 4x^3 - 2x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^4 + 4x^3 - 8x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 + 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^7 + 7x^3 - 4$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^6 + 3$

Exercice 3

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-3}}{x-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}{\sqrt{5x+1} - \sqrt{6x-2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+x-2} - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+x-3} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}$

Exercice 4

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2+x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2-16}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-5x+4}$

Exercice 5

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^7+3x^3+2x+4}{8x^4+x^3+2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^5-2x^3+x^2}{4x^6+8x^3+3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-2x^3}{4x^3+3}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5+4}{2x^2+1}$

Exercice 6

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{x-4}$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2-8}{x^2-7x+10}$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-11}{x^2-4x+3}$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5x-2}{x^2-3x-4}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x+7}{x^2+2x}$

Exercice 7

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x-1)}{x-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(7x)}$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x - \sqrt{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x - \sqrt{3}}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x - \sqrt{2}}{x + \frac{\pi}{4}}$

Exercice 8

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x} + x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 6x + 7} - 2x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 4} - 3x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 6x + 5} - 3x + 4$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - 3x + 5} + x$

Exercice 9

1) Soient f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Est-ce que f admet une limite en 0

2) Soient g la fonction définie par

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x + 2|}$$

2-a) Ecrire g(x) sans valeur absolue

2-b) Est-ce que g admet une limite en -2

3) Soient h la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{x^2 - 3}{x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

c) Est-ce que h continues-en -1

Exercice 10

Calculer limites suivantes et discuter suivantes les valeurs de paramètre m

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} mx^3 + (m+1)x^2 - 2x$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 5}{3x+1}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 5}{(2m-1)x^3 - x + 2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m^2-4)x^3 + (m-2)x^2 - x + 5}{(m+2)x^3 - x + 2}$

Exercice 11

Soient f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 8}$$

1) Déterminer domaine de définition de f

2) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

Exercice 12

Soient f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x+2}$$

- 1) Déterminer domaine de définition de f
- 2) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

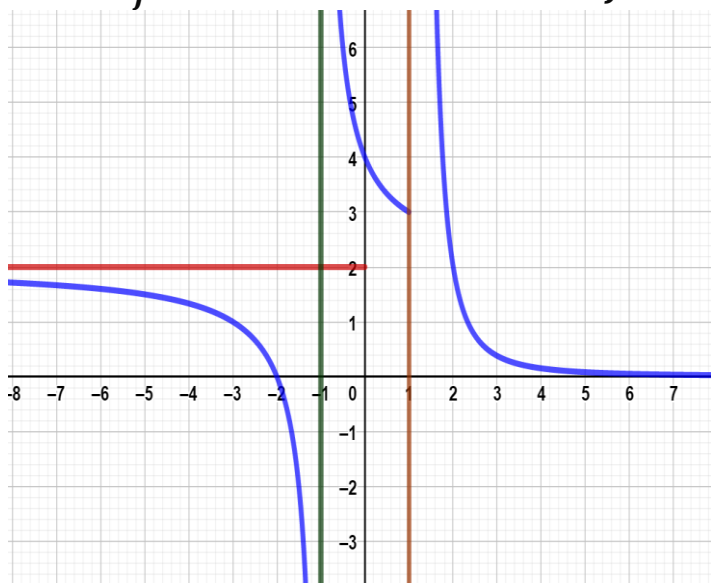
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

- 3) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}; \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$$

Exercice 13

Soit C_f la courbe d'une fonction f



- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- 3) calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Exercice 14

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x-5}{(x-1)^2} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer D_f domaine de définition de f
- 2) Calculer les limites de f au borne de D_f

Exercice 13

Soient f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*; \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$
- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 15

Soient f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x+\cos x}{x}$$

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*; |f(x) - 2| \leq \frac{1}{x}$
- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 16

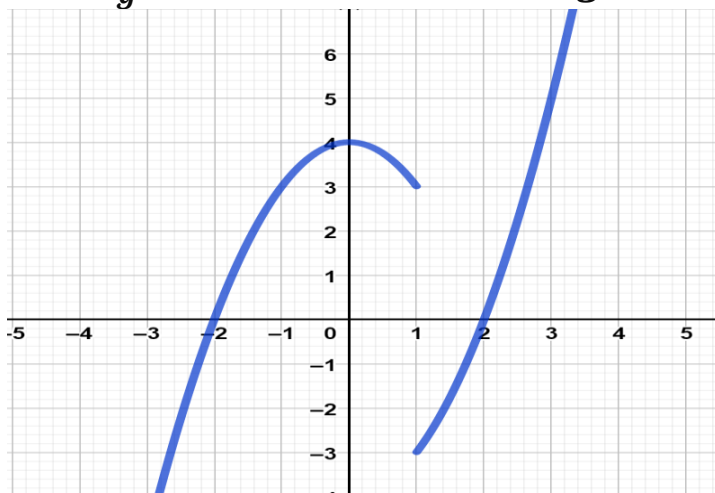
On considérant la fonction g tel que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{3x^2-7x+2} & \text{si } x > 2 \\ \frac{-3x+1}{(x-2)^2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

Exercice 17

Soit C_g la courbe de la fonction g



- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- 2) calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

Exercice 18

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} - x + 1}{x^2 + x\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \cos x}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \sin x}{2 - \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x\sqrt{x} - 2$

Exercice 19

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sin x$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x - \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x+3} \sqrt{x^2 + 3}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x-5}{2x+3}} - 2x$

Exercice 20

Calculer limites suivantes

- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 11x + 24}{x^2 - 8x + 15}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{(x-1)^3}$
- $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^3 - 2\sqrt{2}}{x^2 - 2}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5)^{2023} - 5x$
- $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5)^{2023} + 4x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)^{2023} - \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

Exercice 21

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x + 3}$$

1. Déterminer D_f
2. Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f$, on a : $f(x) = ax^2 + b + \frac{c}{x+3}$
3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax^2 + b)$
4. Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = x^2 - 4$. Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x
5. En déduire les positions relatives des C_f et C_g suivant les valeurs de x

Exercice 22

Soient f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

1. Déterminer D_f
2. Montrer que $\forall x \in D_f; f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$
3. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[\quad 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$
4. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 23

Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^2 - 4x \sin x + 1$$

- 1) Montrer que g est une fonction pair
- 2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+; g(x) \geq (2x - 1)^2$
- 3) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 24

Soient h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par

$$h(x) = \frac{3x \sin x + 4x}{x - 1}$$

1. Montrer que $\forall x \in]1; +\infty[$ on a : $|h(x) - 4| \leq \frac{7}{x-1}$
2. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$