الحساب المثلثي

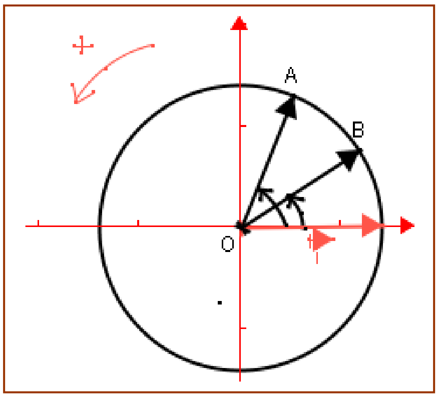
I– تحويل الصيغة $\cos(a-b)$:

نشاط :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر ، و (C) الدائرة المثلثية المرتبطة به .

لتكن A و B نقطتين من الدائرة المثلثية (C) بحيث :

$$\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)\equiv a[2\pi] \quad \text{و} \quad \left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)\equiv b[2\pi]$$



1) بين أن $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)\equiv a-b[2\pi]$.

2) استنتج أن $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=\cos(a-b)$.

3) أحسب $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ تحليليا .

4) أ) استنتج الصيغة التالية :

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

ب) بملاحظة أن $a+b=a-(-b)$ استنتج صيغة $\cos(a+b)$

5) أ) أحسب $\det\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$ ثم استنتج الصيغة التالية :

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$

ب) استنتج صيغة $\sin(a+b)$

1) تحويل $\cos(a-b)$ ونتائجها :

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا الصيغ التالية :

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$$
$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$

أمثلة :

أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$ ، (لاحظ أن $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$)

تذكير:

π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	α
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin\alpha$
-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos\alpha$
0	غ معرف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\tan\alpha$

2) تحويل $\cos(2a)$ و $\sin(2a)$:

نشاط :

- باستعمال صيغتي $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$ ، استنتج صيغتي $\cos(2a)$ و $\sin(2a)$.

- استنتج صيغتي $\cos^2 a$ و $\sin^2 a$

خاصية :

لكل a من IR لدينا الصيغ التالية :

$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$ ، $\sin(2a)=2\sin a\cos a$

$\cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2}$ ، $\sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$

ملاحظة :

بما أن $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ فإن :

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

أمثلة :

أحسب $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

$II-$ تحويل جداءات إلى مجاميع و مجاميع إلى جداءات :

1) تحويل جداءات إلى مجاميع :

نشاط 1 :

أحسب $\cos(a+b)+\cos(a-b)$ ثم استنتج صيغة $\cos a\cos b$

أحسب $\cos(a+b)-\cos(a-b)$ ثم استنتج صيغة $\sin a\sin b$

أحسب $\sin(a+b)+\sin(a-b)$ ثم استنتج صيغة $\sin a\cos b$

أحسب $\sin(a+b)-\sin(a-b)$ ثم استنتج صيغة $\cos a\sin b$

خاصية 1 :

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا الصيغ التالية :

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$$
$$\sin a\sin b=\frac{-1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$$
$$\cos a\sin b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)-\sin(a-b)\right)$$
$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$$

2) تحويل مجاميع إلى جداءات :

نشاط 2 :

1) نضع $p=a+b$ و $q=a-b$ ، بين أن : $a=\dfrac{p+q}{2}$ و $b=\dfrac{p-q}{2}$

2) باستعمال الخاصية السابقة ،
حدد $\cos(p)+\cos(q)$ و $\cos(p)-\cos(q)$ و $\sin(p)+\sin(q)$ و
$\sin(p)-\sin(q)$

خاصية 2 :

لكل p و q من $\mathbb{R}$ لدينا الصيغ التالية :

$$\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

أمثلة :

أحسب $\cos\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}$. عمل التعبير $\cos(2x)-\cos(4x)$

III- تحويل $\tan(a+b)$ و $\tan(a-b)$:

نشاط :

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ لكل $k\in\mathbb{Z}$.

1) نفترض أن $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ لكل $k\in\mathbb{Z}$ ، باستعمال صيغتي $\cos(a+b)$ و $\sin(a+b)$

بين أن : $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}\quad(*)$

2) حدد شرط وجود $\tan(a-b)$ ثم استنتج صيغته .

خاصية :

لكل a و b من $\mathbb{R}$ بحيث $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

لدينا :

- إذا كان $a+b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، فإن :

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

- إذا كان $a-b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، فإن :

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

أمثلة :

أحسب $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ (لاحظ أن : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ وأن $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$)

نتيجة :

لكل a من $\mathbb{R}$ بحيث $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ لدينا :

- إذا كان $2a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، فإن :

$$\tan(2a)=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

مثال :

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2+2x-1=0$ 2) أحسب $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

IV- تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$:

نشاط :

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$

ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ و و x من $\mathbb{R}$ و $M(a;b)$ نقطة من المستوى ، و α قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$

1) أنشئ الشكل .

2) بين أن : $a=r\cos\alpha$ و $b=r\sin\alpha$ حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$

3) استنتج أن : $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\alpha)$

خاصية:

ليكن a و b من $\mathbb{R}^*$ ، و x من $\mathbb{R}$.
يوجد عدد حقيقي α يحقق : $a\cos x+b\sin x=r\cos(x-\alpha)$ حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$

مثال :

بين أن : $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

ملاحظة :

يمكننا تحويل الصيغة $a\cos x+b\sin x$ من حل معادلات من نوع : $a\cos x+b\sin x=c$ أو متراجحات من نوع $a\cos x+b\sin x<c$ ، $a\cos x+b\sin x>c$ ، $a\cos x+b\sin x\leq c$ و $a\cos x+b\sin x\geq c$

مثال :

حل في $\mathbb{R}$ ثم في المجال $]-\pi;\pi]$ المعادلة : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\sqrt{2}$
والمتراجحتين : $\cos x+\sqrt{3}\sin x\leq\sqrt{2}$ و $\cos x+\sqrt{3}\sin x>\sqrt{2}$