المتتاليات العددية

I- عموميات حول المتتاليات العددية :

نشاط :

لاحظ ثم أتمم بأربعة أعداد ملائمة لتسلسل كل لائحة من اللوائح التالية :

أ) 0 ، 2 ، 4 ، 6 ، .....

ب) 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، .....

ج) 0 ،1 ، 4 ، 9 ، .....

- نأخذ الآن الأعداد المتتابعة الآتية : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، ..... ونربط الأعداد الصحيحة الطبيعية بهذه الأعداد على الشكل التالي :

$$\begin{cases} 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;.....;\ n\ ;... \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ .....\ \ \downarrow..... \\ 1\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;.....;u(n);... \end{cases}$$

نقول لقد عرفنا تطبيقا u من المجموعة نحو .

1- تعريف :

ليكن $n_0 \in \mathbb{N}$ و I جزء من $\mathbb{N}$ بحيث $I=\{n_0\ ;n_0+1;n_0+2;....\}$ كل تطبيق u من I نحو يسمى متتالية عددية .

مثال 1 :

نعتبر التطبيق u المعرف كما يلي : $\begin{array}{l} u:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ n\mapsto 2n+3 \end{array}$

u متتالية عددية ، $u(0)=3$ هي صورة 0 بالمتتالية u .

2- اصطلاحات ورموز :

لتكن u متتالية عددية معرفة على I و $n\in I$.

صورة n بـ u نرمز لها بالرمز u_n عوض $u(n)$.

نرمز للمتتالية u بالرمز $(u_n)_{n\in I}$ أو بالرمز $(u_n)_{n\geq n_0}$.

العدد u_n يسمى حد المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ذو المدل n ، ويسمى كذلك الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$.

العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$.

إذا كان $n_0=0$ أي في هذه الحالة $I=\mathbb{N}$ فإننا نرمز للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بالرمز $(u_n)_{n\geq 0}$ أو $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n).

إذا كان $n_0=1$ أي في هذه الحالة $I=\mathbb{N}^*$ فإننا نرمز للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ بالرمز $(u_n)_{n\geq 1}$ أو $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

مثال 2 :

نعود إلى المثال 1 ، لدينا المتتالية المعرفة بـ " $u(n)=2n+3$ "

- نرمز لهذه المتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n).

- الحد الأول لهذه المتتالية هو $u_0=3$ و الحد ذو المدل 10 لهذه المتتالية هو $u_{10}=2\times 10+3=23$.

- الحد العام لهذه المتتالية هو $u_n=2n+3$.

3- متتاليات معرفة بالصيغة الصريحة لحدها العام :

تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

إذا كان الحد العام u_n معرف بدلالة n وغير مرتبط بالحدود الأخرى ، نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ معرفة بصيغة صريحة .

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n=n^2-5n$.

المتتالية (u_n) معرفة بصيغة صريحة لأن n^2-5n لا يتعلق بحدود أخرى لـ (u_n).

4- متتاليات معرفة بعلاقة ترجعية :

تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

إذا كان الحد العام u_n مرتبط بحدود أخرى لـ $(u_n)_{n\geq n_0}$ ، نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ معرفة بعلاقة ترجعية .

مثال :

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_0=1$ و $v_{n+1}=2v_n-1$ ، المتتالية (v_n) معرفة بعلاقة ترجعية لأن v_{n+1} يتعلق بـ v_n .

II- المتتالية المكبورة ، المتتالية المصغورة ، المتتالية المحدودة :

نشاط :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_n=\dfrac{n+3}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

1- بين أن : $\forall n\geq 0:\ u_n\geq 1$ ، ماذا تستنتج ؟

2- بين أن (u_n) مكبورة بالعدد 3 ، ماذا تستنتج ؟

تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية و M و m عددين حقيقيين .

- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مكبورة بالعدد M إذا وفقط إذا كان $\forall n \geq n_0 : \ u_n \leq M$.
- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ مصغورة بالعدد m إذا وفقط إذا كان $\forall n \geq n_0 : \ u_n \geq m$.
- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة .

تمرين تطبيقي 1 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n = \frac{1}{1+n^2} + \cos n$

- بين أن (u_n) مكبورة بالعدد 2 ومصغورة بالعدد -1 ؟

III- رتابة متتالية :

نشاط :

1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 1 : \ u_n = \frac{n-1}{n}$

أ- أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم رتبها.

ب- قارن u_{n+1} مع u_n ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، ماذا تستنتج ؟

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 0 : \ v_n = \frac{1}{2^n}$ ، بين أن المتتالية (v_n) تناقصية .

تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تزايدية (تزايدية قطعا) إذا وفقط إذا كان $\forall n \geq n_0 : \ u_{n+1} \geq u_n$ $\left(\forall n \geq n_0 : \ u_{n+1} > u_n\right)$
- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ تناقصية (تناقصية قطعا) إذا وفقط إذا كان $\forall n \geq n_0 : \ u_{n+1} \leq u_n$ $\left(\forall n \geq n_0 : \ u_{n+1} < u_n\right)$
- نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان $\forall n \geq n_0 : \ u_{n+1} = u_n$.

تمرين تطبيقي 2 :

1- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_n = \sqrt{n}$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ، بين أن (u_n) تزايدية قطعا .

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ $v_0 = 4$ و $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ ،

أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n > 0$.

ب) بين أن (v_n) تناقصية قطعا .

IV- المتتالية الحسابية :

نشاط :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\geq 0:\ u_n=2n+1$

1- أحسب الحدود u_1-u_0 ، u_2-u_1 و u_3-u_2 ؛ ماذا تلاحظ ؟

2- أحسب $u_{n+1}-u_n$ ، ماذا تلاحظ ؟

1- تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية عددية .

- نقول إن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية إذا وُجد عدد حقيقي r بحيث :

$\forall n\geq n_0:\ u_{n+1}=u_n+r$

- العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$.

تمرين تطبيقي 3 :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n\geq 0:\ u_n=-5n+4$

بين أن (u_n) متتالية حسابية محددا عناصرها المميزة (الحد الأول والأساس) .

2- صيغة الحد العام لمتتالية حسابية :

نشاط :

لتكن (u_n) متتالية حسابية و r أساسها .

لدينا المتساويات :

$u_1=u_0+r$

$u_2=u_1+r$

.....

.....

$u_n=u_{n-1}+r$

بالجمع نجد : $u_n=u_0+nr$

لدينا $u_n=u_0+nr$

و $u_p=u_0+pr$

إذن $u_n=u_p+(n-p)r$

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه لكل n و p من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n=u_p+(n-p)r$

حالة خاصة :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n=u_0+nr$

تمرين تطبيقي 4 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية و r أساسها بحيث حدها الأول هو $u_1=8$ و $u_{15}=50$.

أحسب أساس هذه المتتالية .

3- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

نشاط :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r .

1) بين أن : $u_p+u_{n-p}=u_0+u_n$ حيث $0\le n$ و $0\le p\le n$

2) نضع : $S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$

أحسب المجموع التالي وبسطه : $S_n=u_0+u_1+u_2+.....+u_n$

$S_n=u_n+u_{n-1}+u_{n-2}+.....+u_0$

3) أحسب المجموع : $S'_n=u_p+u_{p+1}+....+u_n$

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية ، نضع : $S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+.....+u_n$

حيث $n_0\le p\le n$

لدينا : $S_n=(n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$

حالة خاصة :

إذا كان $p=n_0=0$ فإن $S_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ وإذا كان $p=n_0=1$ فإن $S_n=n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$

ملاحظة :

$$S_n=(\text{nombre de termes de } S_n)\left(\frac{(1^{er}\text{ terme de } S_n)+(\text{dernier terme de } S_n)}{2}\right)$$

تمرين تطبيقي 5 :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\ge0:\ u_n=5n-4$

1) بين أن $(u_n)_{n\ge0}$ متتالية حسابية محددا عناصرها المميزة .

2) أحسب المجموع : $S_n=u_3+u_4+u_5+.....+u_{10}$

V- المتتالية الهندسية :

نشاط :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بما يلي : $\forall n\ge0:\ u_n=2\times3^n$

- أحسب $\frac{u_1}{u_0}$ ، $\frac{u_2}{u_1}$ ، $\frac{u_3}{u_2}$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ؛ ماذا تلاحظ ؟

1- تعريف :

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية .

- نقول إن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية هندسية إذا وُجد عدد حقيقي q بحيث : $\forall n\ge n_0:\ u_{n+1}=q\times u_n$

- العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$.

مثال :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $\forall n \geq 0 : \ u_n = -5 \times 2^n$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا عناصرها المميزة (الحد الأول والأساس).

2- صيغة الحد العام لمتتالية هندسية :

نشاط :

لتكن (u_n) متتالية هندسية و q أساسها .

لدينا المتساويات :

$$\begin{array}{l} \cancel{u_1 = q \times u_0} \\ \cancel{u_2 = q \times u_1} \\ \cancel{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \cancel{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \cancel{u_n = q \times u_{n-1}} \\ \hline u_n = q^n \times u_0 \end{array}$$

لدينا $u_n = q^n \times u_0$

و $u_p = q^p \times u_0$

إذن $u_n = q^{n-p} \times u_p$

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه لكل $n \geq 0$ و $p \geq 0$ لدينا :

: $u_n = q^{n-p} \times u_p$

حالة خاصة :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه لكل $n \geq 0$

لدينا : $u_n = q^n \times u_0$

تمرين تطبيقي 6 :

لتكن (u_n) متتالية هندسية و q أساسها بحيث $u_1 = \frac{3}{4}$ و $u_6 = 24$ ، أحسب أساس هذه المتتالية .

3- مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية :

نشاط :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q بحيث $q \neq 0$ و $q \neq 1$.

1) نضع : $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots\ldots + u_n$

بين أن : $S_n = u_p + q u_p + q^2 u_p + \ldots + q^{n-p} u_p$ (*) وأن : $qS_n = q u_p + q^2 u_p + q^3 u_p + \ldots + q^{n-p+1} u_p$ (**)

2) بحساب الفرق بين العلاقتين (*) و (**) وتبسيطه تأكد أن : $S_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$

خاصية :

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q بحيث $q \neq 0$ و $q \neq 1$

، وليكن $n \geq p \geq n_0$

نضع : $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots\ldots + u_n$ لدينا :

$$S_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

حالة خاصة :

- إذا كان $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$ فإن $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

ملاحظة :

$$S_n = \left(1^{er}\ terme\ de\ S_n\right) \times \left(\frac{1-q^{\left(nombre\ de\ termes\ de\ S_n\right)}}{1-q}\right)$$

تمرين تطبيقي :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_n = \frac{1}{3} \times 2^n$

1) أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا عناصرها المميزة .

ب) أحسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_9$.

2) أحسب المجموع : $S'_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots\ldots + 3^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$