الجداء السلمي وتطبيقاته

I- صيغ تحليلية :

1- الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم م م :

تعريف (تذكير) :

ليكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ متجهتين غير مستقيميتين و o نقطة من المستوى .

نقول إن المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ متعامد ممنظم إذا كان $\vec{i}.\vec{j}=0$ و $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$.

إذا كان المعلم المتعامد الممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$ مباشر إذا كان القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ هو $\frac{\pi}{2}$.

فيما تبقى من فقرات الدرس المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

نشاط :

نعتبر المتجهتين $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ ، أحسب $\vec{u}\vec{v}$ بدلالة x و y و x' و y' .

خاصية :

لتكن المتجهتين $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ من المستوى ، لدينا : $\vec{u}\vec{v}=xx'+yy'$

نتيجة :

لتكن المتجهتين $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ من المستوى ، لدينا :

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

تمرين تطبيقي 1 :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ المتجهات المعرفة كما يلي : $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+4\vec{j}$ و $\vec{w}=3\vec{i}+6\vec{j}$

1) أحسب $\vec{u}\vec{v}$ و $\vec{u}\vec{w}$ و $\vec{v}\vec{w}$

2) ماذا تستنتج بالنسبة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{w}$.

2- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة ولمسافة نقطتين :

نشاط 1 :

نعتبر المتجهة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

1) أحسب $\vec{u}\vec{u}$ بدلالة x و y .

2) حدد $\vec{u}\vec{u}$ بدلالة $\|\vec{u}\|$ ثم استنتج $\|\vec{u}\|$ بدلالة x و y .

خاصية 1 :

لتكن المتجهة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ، منظم المتجهة $\|\vec{u}\|$ هو :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

نشاط 2 :

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين من المستوى .

1) حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

2) استنتج AB بدلالة x_A و y_A و x_B و y_B.

خاصية 2 :

لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتين من المستوى ، لدينا :

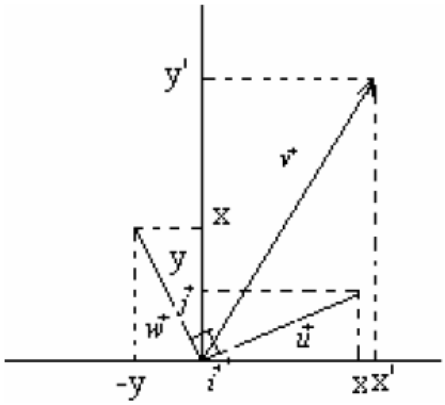
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

تمرين تطبيقي 2 :

نعتبر النقط : $A(1;-1)$ و $B(5;2)$ و $C(-2;3)$ ، بين أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A .

3- صيغتا $\cos\theta$ و $\sin\theta$:

نشاط :



لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى و θ القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$، لتكن $\vec{w}$ متجهة بحيث $\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|$ و $(\vec{u};\vec{w})=\frac{\pi}{2}$ و α القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\vec{v};\vec{w})$.

1) أكتب $\vec{u}.\vec{v}$ بدلالة x و y و x' و y' ثم بدلالة $\|\vec{u}\|$ و $\|\vec{v}\|$ و θ .

2) استنتج $\cos\theta$ بدلالة x و y و x' و y' .

3) تحقق أن $\cos\alpha=\sin\theta$ ثم أحسب $\sin\theta$ بدلالة x و y و x' و y' .

خاصية :

لتكن $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى و θ قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\vec{v})$ ، لدينا :

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad \text{و} \quad \sin\theta=\frac{\det(\vec{u};\vec{v})}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}=\frac{xy'-x'y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

تمرين تطبيقي 3 :

لتكن النقط : $A(3;3)$ و $B(1;3)$ و $C(1;1)$ و θ القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ ، أحسب θ .

II- المستقيم في المستوى - دراسة تحليلية :

1- متجهة منظمية على مستقيم :

تعريف :

ليكن (D) مستقيما في المستوى و $\vec{u}$ متجهة موجهة له .

نسمي متجهة منظمية على (D) كل متجهة غير منعدمة ومتعامدة مع $\vec{u}$.

أي: $\vec{n}$ منظمية على (D) $\Leftrightarrow$ $\vec{n}\neq\vec{0}$ و $\vec{u}.\vec{n}=0$

نشاط 1 :

ليكن (D) مستقيما في المستوى معادلته $ax+by+c=0$ والمتجهة $\vec{n}(a;b)$.

حدد متجهة $\vec{u}$ موجهة لـ (D) ثم أحسب $\vec{u}.\vec{n}$ ، ماذا تستنتج ؟

خاصية :

ليكن (D) مستقيما معادلته $ax+by+c=0$ ، المتجهة $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية على المستقيم (D).

2- معادلة مستقيم معرف بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

نشاط :

ليكن (D) مستقيما يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$ والمتجهة $\vec{n}(a;b)$ منظمية عليه و

$M(x;y)$ نقطة من المستوى

بين أن : $M\in(D)\Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

خاصية :

معادلة المستقيم المار من النقطة $A(x_0;y_0)$ والمتجهة $\vec{n}(a;b)$ منظمية

عليه هي : $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

أي : $ax+by+c=0$ حيث $c=-ax_0-by_0$

مثال :

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المار من النقطة $A(2;1)$ والمتجهة $\vec{n}(3;2)$ منظمية عليه .

3- تعامد مستقيمين :

خاصية :

ليكن (D) و (D')مستقيمين معادلتيهما $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ على التوالي ،

يكون المستقيمين (D) و (D') متعامدين إذا وفقط إذا كانت متجهتيهما المنظميتين متعامدتان ، أي $aa'+bb'=0$

مثال:

نعتبر المستقيمين $(D):2x-y+1=0$ و $(\Delta):x+2y-4=0$، بين أن $(D)\perp(\Delta)$

4- مسافة نقطة عن مستقيم :

تعريف :

ليكن (D) مستقيما في المستوى و A نقطة من المستوى و H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

نسمي مسافة النقطة A عن المستقيم (D) المسافة AH ونكتب :

$$d(A;(D))=AH$$

نشاط :

ليكن $(D):ax+by+c=0$ مستقيما و $\vec{n}(a;b)$ متجهة منظمية عليه و $B(x_B;y_B)$ نقطة منه .

و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى و H المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

1) بين أن $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=\vec{n}.\overrightarrow{AH}$

2) حدد $\vec{n}.\overrightarrow{AH}$ بدلالة $\|\vec{n}\|$ و AH و α حيث $\alpha=\left(\vec{n};\overrightarrow{AH}\right)$ ثم استنتج أن

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{a^2+b^2}.AH$$

3) أحسب $\vec{n}.\overrightarrow{AB}$ بدلالة a و b و c و x_A و y_A ثم استنتج $\left|\vec{n}.\overrightarrow{AB}\right|$.

4) استنتج AH بدلالة a و b و c و x_A و y_A .

خاصية :

ليكن $(D):ax+by+c=0$ مستقيما و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .

مسافة النقطة A عن المستقيم (D) هي : $d(A;(D))=\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرين تطبيقي 4 :

نعتبر المستقيم $(D):3x+4y+5=0$ و النقطة $A(3;-1)$.

1) أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D).

2) أحسب مسافة النقطة $B(1;-2)$ عن المستقيم (D)، ماذا تستنتج ؟

III- معادلة ديكارتية لدائرة :

1- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بمركزها وشعاعها :

نشاط :

1) نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$.
هل النقطتين $A(1;4)$ و $B(5;-1)$ تنتميان إلى هذه الدائرة ؟
2) ما هو الشرط اللازم والكافي لكي تنتمي النقطة $M(x;y)$ إلى الدائرة (C) ؟

خاصية :

معادلة الدائرة التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R هي
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
وتكتب أيضا على شكل : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ حيث
$c=a^2+b^2-R^2$

أمثلة :

1) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(-1;3)$ وشعاعها $R=3$.
2) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C') التي مركزها $\Omega(0;1)$ وشعاعها $R=\sqrt{5}$.

2- معادلة ديكارتية لدائرة معرفة بأحد أقطارها :

خاصية 1 :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى ، توجد دائرة وحيدة (C) بحيث أحد أقطارها $[AB]$.
مركز الدائرة (C) هو النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ وشعاعها
$R=\frac{AB}{2}$

مثال 1 :

حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1;3)$ و $B(1;-5)$

خاصية 2 :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى ،
مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ هي الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$.

مثال 2 :

حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1;3)$ و $B(1;-5)$ باستعمال الخاصية 2)

3- تمثيل بارامتري لدائرة :

نشاط :

نعتبر الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R و $M(x;y)$ نقطة من الدائرة (C) حيث : $\left(\vec{i};\overrightarrow{\Omega M}\right)=\theta$

1) بين أن $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M}=R\cos\theta$ و أن $\vec{j}.\overrightarrow{\Omega M}=R\sin\theta$

2) أحسب تحليليا $\vec{i}.\overrightarrow{\Omega M}$ و $\vec{j}.\overrightarrow{\Omega M}$.

3) استنتج أن : $\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\ y=b+R\sin\theta\end{cases}$

خاصية وتعريف :

الدائرة (C) التي مركزها $\Omega(a;b)$ وشعاعها R هي مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق $(S)\begin{cases}x=a+R\cos\theta\\ y=b+R\sin\theta\end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$

النظمة (S) تسمى تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) .

مثال :

حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(5;-1)$ وشعاعها $R=7$.

IV- دراسة مجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

نشاط : حدد المجموعات :

$$E_1=\left\{M(x,y)\in(P)/x^2+y^2-2x-6y-6=0\right\}$$
$$E_2=\left\{M(x,y)\in(P)/x^2+y^2+4x-2y+5=0\right\}$$
$$E_3=\left\{M(x,y)\in(P)/x^2+y^2-8y+20=0\right\}$$

بصفة عامة ، لنحدد المجموعة : $E=\left\{M(x,y)\in(P)/x^2+y^2+ax+by+c=0\right\}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية :

لتكن $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ و $M(x;y)$ نقطة من المستوى ، لدينا :

$$M(x,y)\in E\Leftrightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+2\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{4}+y^2+2\frac{b}{2}y+\frac{b^2}{4}+c=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$$
$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$
$$\Leftrightarrow \Omega M^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}\quad (*)$$

العلاقة $(*)$ تحيلنا على ثلاث حالات مختلفة هي :

- الحالة 1 : إذا كان $a^2+b^2-4c>0$ فإن : $\left((*)\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2\right)$ حيث : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

إذن في هذه الحالة E هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ وشعاعها $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ ،

$E=C(\Omega;R)$

- الحالة 2 : إذا كان $a^2+b^2-4c=0$ فإن : $\left((*)\Leftrightarrow \Omega M^2=0\Leftrightarrow M=\Omega\right)$.

إذن في هذه الحالة E تحتوي فقط على النقطة $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ ، $E=\{\Omega\}$

- الحالة 3 : إذا كان $a^2+b^2-4c<0$ فإن : $\left((*)\Rightarrow \Omega M^2<0\right)$

في هذه الحالة المجموعة E فارغة ، $E=\phi$

خاصية:

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(x,y)\in(P)/x^2+y^2+ax+by+c=0\right\}$ حيث a و b و c أعداد حقيقية ، لدينا :

$a^2+b^2-4c>0$ يكافئ (E) هي الدائرة التي مركزها $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$ وشعاعها $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

$a^2+b^2-4c=0$ يكافئ $E=\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$

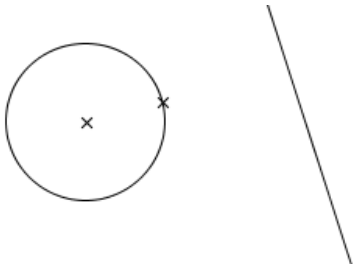
$a^2+b^2-4c<0$ يكافئ $E=\phi$

V- الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم :

لدراسة الوضع النسبي لدائرة (C) مركزها Ω وشعاعها R مع مستقيم (D) ، نحسب المسافة $d=d(\Omega;(D))$ ،

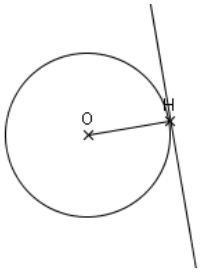
- إذا كان $d>R$ فإن المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C) ،

أي : $(C)\cap(D)=\phi$

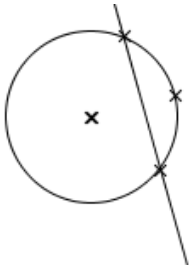


- إذا كان $d=R$ فإن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطة وحيدة H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (D) ،

أي : $(C)\cap(D)=\{H\}$ ، وفي هذه الحالة نقول إن المستقيم (D) مماس للدائرة (C) في النقطة H .



- إذا كان $d<R$ فإن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين A و B ، أي : $(C)\cap(D)=\{A;B\}$



تمرين تطبيقي 5 :

حدد الأوضاع النسبية للدائرة (C) مع المستقيم (D) في كل حالة من الحالات التالية :

1) الدائرة (C) مركزها $\Omega(-2;1)$ وشعاعها $R=\sqrt{5}$ و $(D):x+2y+5=0$

2) الدائرة (C) مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ و $(D):x-y+3=0$

3) الدائرة (C) مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها $R=2$ و $(D):x+y+3=0$

VI- معادلة ديكارتية لمستقيم مماس لدائرة في نقطة معلومة من الدائرة :

نشاط :

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(\alpha;\beta)$ وشعاعها R و $A(x_A;y_A)$ نقطة من الدائرة (C).

ليكن (D) مماس الدائرة (C) في A و $M(x;y)$ نقطة من المستوى .

بين أن $M\in(D)\Leftrightarrow(\alpha-x_A)(x-x_A)+(\beta-y_A)(y-y_A)=0$

خاصية :

لتكن (C) دائرة مركزها $\Omega(\alpha;\beta)$ وشعاعها R و $A(x_A;y_A)$ نقطة من الدائرة (C).

معادلة المماس للدائرة (C) في A هي : $ax+by+c=0$

حيث : $a=(\alpha-x_A)$ و $b=(\beta-y_A)$ و

$c=(x_A-\alpha)x_A+(y_A-\beta)y_A$

مثال :

حدد معادلة المماس للدائرة $(C):x^2+y^2-4x-6y+4=0$ في النقطة $A(2;6)$ بعد أن تتحقق من أن $A\in(C)$.

VII- داخل وخارج دائرة :

تعاريف :

لتكن (C) دائرة ، مركزها Ω وشعاعها R و A نقطة من المستوى .

النقطة A تنتمي إلى الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $\Omega A=R$

النقطة A تنتمي إلى داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $\Omega A<R$

النقطة A تنتمي إلى خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان $\Omega A>R$

نتيجة :

لتكن (C) دائرة معادلتها $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ و $A(x_A;y_A)$ نقطة من المستوى .

النقطة A تنتمي إلى الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان

$x_A^2+y_A^2-2ax_A-2by_A+c=0$

النقطة A تنتمي إلى داخل الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان

$x_A^2 + y_A^2 - 2ax_A - 2by_A + c < 0$

النقطة A تنتمي إلى خارج الدائرة (C) إذا وفقط إذا كان

$x_A^2 + y_A^2 - 2ax_A - 2by_A + c > 0$

تمرين تطبيقي 6 :

نعتبر الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(-1;3)$ والشعاع $R = 2$

1) حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) .

2) استنتج الأوضاع النسبية للنقط التالية بالنسبة للدائرة (C) : $A(-2;4)$ ، $B(-1;1)$ و O أصل المعلم .