Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 1

On considère les points : $A\left(\sqrt{3}-1;\sqrt{3}+1\right)$, $B(-2;2)$, $C(1;-1)$

1. (a) Montrer que $OA = 2\sqrt{2}$ et calculer la distance OB.
   (b) Déduire la nature du triangle OAB.
2. (a) Calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ et $\det(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
   (b) Déduire $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et $\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
   (c) Déterminer la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la hauteur du triangle ABC qui passe par A.

Exercice 2

Soit ABC un triangle et J un point tel que $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BC}$.
Soit G le barycentre des points pondérés $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$.

1. Montrer que $J = \mathrm{Bary}\{(B;-1),(C;2)\}$.
2. Construire le point $K = \mathrm{Bary}\{(A;1),(C;2)\}$.
3. Montrer que G est le milieu du segment $[AJ]$, puis construire le point G.
4. Montrer que les points G, B et K sont alignés.
5. Montrer que le point K est le centre de gravité du triangle ABJ.
6. Sachant que $A(1;2)$, $B(-1;3)$ et $C(-1;0)$, déterminer les coordonnées de G.
7. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = 2\times\|-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$.

Exercice 3

On considère $A(1;3)$ et $B(3;1)$ deux points du plan, et on considère $(\mathscr{C})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 3$.

1. (a) Montrer que l'équation de l'ensemble $(\mathscr{C})$ s'écrit sous la forme :
   $x^2+y^2-4x-4y+3=0$.
   (b) Vérifier que $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre Ω et de rayon R à déterminer.
2. (a) Vérifier que $H(1;4)\in(\mathscr{C})$.
   (b) Déterminer une équation de la droite (D) tangente au cercle $(\mathscr{C})$ en H.
3. Soit (Δ) la droite passant par $C(0;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1;3)$.
   (a) Montrer que l'équation cartésienne de (Δ) est $x+3y-3=0$.
   (b) Calculer $d(\Omega;(\Delta))$ puis déduire que (Δ) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en deux points E et F.
   (c) Déterminer les coordonnées de E et F.
   (d) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} x+3y-3>0 \\ x^2+y^2-4x-4y+3\leq 0 \end{cases}$