مـــــرجـــــح نـــقـــطـــتـــيـــن

تـعـريـف

لتكن A و B نقطتين متميزتين، و α و β عددين حقيقيين حيث: $\alpha+\beta\neq 0$
نسمي G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب حيث:

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

مفاهيم عامة

- الثنائية $(A;\alpha)$ تسمى نقطة مثقلة.
- الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ تسمى جملة نقطتين مثقلتين.
- إذا كان $\alpha+\beta=0$ أي $\alpha=-\beta$ ومنه العلاقة تصبح: $\alpha\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$ وهذا غير ممكن إذا كان: $\alpha\neq 0$ و $A\neq B$
- إذا كان $\alpha=\beta$ نحصل على: $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}$ والنقطة G منتصف $[AB]$.

نتائج هامة

- النقطة G وحيدة.
- G مرجح الجملة $\{(A;\lambda\alpha),(B;\lambda\beta)\}$ حيث: $\lambda\in\mathbb{R}$
- النقط A، B و G على استقامية واحدة.
- من أجل كل نقطة M من المستوى: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

إنشاء مرجح نقطتين

لإنشاء G نعتمد العلاقة: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

إحداثيي مرجح نقطتين

G مرجح النقطتين $A(x_A; y_A)$ و $B(x_B; y_B)$ المرفقتين بالمعاملين α و β على الترتيب.

إذا كان: $G(x_G; y_G)$

لدينا: $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$ و $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$

مجموعات النقط

النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$

والنقطة G' مرجح الجملة: $\{(A;\alpha'),(B;\beta')\}$

- كل علاقة من الشكل: $\left\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\alpha'\overrightarrow{MA} + \beta'\overrightarrow{MB}\right\|$

  حيث: $|\alpha + \beta| = |\alpha' + \beta'| \neq 0$

  هي محور القطعة $[GG']$.

- كل علاقة من الشكل: $\left\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\lambda\overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB}\right\|$

  حيث: $\lambda \neq 0$ و $\alpha + \beta \neq 0$

  هي دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث:

$$r = \frac{|\lambda|}{|\alpha + \beta|} \times AB$$

- كل علاقة من الشكل:

$$\left\|\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB}\right\| = k$$

حيث k عدد حقيقي موجب تماما و: $\alpha + \beta \neq 0$

هي دائرة مركزها G ونصف قطرها r حيث:

$$r = \frac{k}{|\alpha + \beta|}$$

مـــــرجـــح ثـــلاث نـــقـــط

تـــعـــريـــف

لتكن A ، B و C ثلاث نقط متميزة و α ، β و γ أعداد حقيقية حيث:

$$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

نسمي G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات α ، β و γ على الترتيب حيث:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

مـفـاهـيـم عـامـة

- إذا كان: $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن المرجح غير موجود.
- إذا كان: $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$ فإن G تسمى مركز المسافات المتساوية.
- إذا كان: $\alpha=\beta=\gamma=1$ والنقط A ، B و C ليست على استقامة، فإن G مركز ثقل المثلث ABC.

نـتـائـج هـامـة

- النقطة G وحيدة.
- G مرجح الجملة:

$$\{(A;\lambda\alpha),(B;\lambda\beta),(C;\lambda\gamma)\} \quad \text{حيث} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

- من أجل كل نقطة M من المستوى:

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$$

إنشاء مرجح ثلاث نقط

لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

إحداثيي مرجح ثلاث نقط

G مرجح النقط $A(x_A; y_A)$، $B(x_B; y_B)$ و $C(x_C; y_C)$ المرفقة بالمعاملات α، β و γ على الترتيب.

إذا كان: $G(x_G; y_G)$

لدينا:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

إنشاء مرجح ثلاث نقط:

لإنشاء G نعتمد العلاقة:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

خاصية التجميع:

G مرجح الجملة: $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$

إذا كان: $\alpha+\beta \neq 0$

وكانت G' مرجح: $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$

فإن G مرجح الجملة:

$$\{(G';\alpha+\beta),(C;\gamma)\}$$

مجموعات النقط:

- إذا كان: $\|\overrightarrow{MG}\| = AB$
فإن مجموعة النقط M هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها AB.

- إذا كان: $\|\overrightarrow{MG}\| = k$ حيث $k > 0$ فإن مجموعة النقط M هي: دائرة مركزها G ونصف قطرها k.

- إذا كان: $\|\overrightarrow{MG}\| = k$ حيث $k < 0$
فإن مجموعة النقط M هي: مجموعة خالية $\varnothing$.

- إذا كان: $\|\overrightarrow{MG}\| = 0$ فإن مجموعة النقط M هي النقطة G.

ملاحظات:

- لإثبات أن النقطة B تنتمي إلى مجموعة النقط يكفي تعويض M بـ B في العلاقة المعطاة ونتحصل على علاقة صحيحة.

- لإثبات أن شعاعًا أو علاقة ما مستقلة عن M يكفي استخدام علاقة شال وخواص الأشعة للتخلص من M.

إثبات تلاقي مستقيمات:

لإثبات أن مستقيمات تتقاطع في نقطة G يكفي أن نثبت أن هذه النقطة مرجح لنقطتين من كل مستقيم بمعاملات حقيقية.

إثبات استقامية نقط:

لإثبات أن ثلاث نقط في استقامية يكفي أن نثبت أن نقطة منها هي مرجح للنقطتين الأخريين