المرجح في المستوى

$I-$ مرجح نقطتين متزنتين :

1- تعريف نقطة متزنة :

لتكن A نقطة من المستوى و α عددا حقيقيا .
الزوج $(A;\alpha)$ يسمى نقطة متزنة والعدد α يسمى وزن النقطة A ، ونقول كذلك إن النقطة A معينة بالمعامل α .

نشاط :

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى ،
1) أنشئ النقطة G بحيث $-2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (أكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$)
2) هل يمكن إنشاء نقطة G بحيث $3\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ؟ علل جوابك .
3) ليكن α و β عددين حقيقيين ، حدد علاقة بين α و β لكي توجد نقطة وحيدة G بحيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
(ناقش الحالات : α و β منعدمين معا ، ثم غير منعدمين معا و لكن متقابلان $\alpha+\beta=0$ ثم الحالة $\alpha+\beta\neq 0$)

خاصية وتعريف :

نعتبر في المستوى نقطتين متزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ بحيث : $\alpha+\beta\neq 0$
- توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
- النقطة G تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$، وتسمى كذلك مرجح النظمة المتزنة : $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$

ملاحظات :

* لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ نقطتين متزنتين .
- إذا كان $\alpha+\beta=0$ فإن النقطتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ليس لهما مرجح إذا كان $A\neq B$.
* نفترض أن $\alpha+\beta\neq 0$ و ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$،
- إذا كان $\alpha=0$ فإن $\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ (لأن $\beta\neq 0$) إذن $G=B$.
- إذا كان $\beta=0$ فإن $\alpha\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{GA}=\vec{0}$ (لأن $\alpha\neq 0$) إذن $G=A$.
- إذا كان $\alpha=\beta$ فإن $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ ومنه G منتصف القطعة $[AB]$.

2- خاصيات مرجح نقطتين متزنتين :

أ) خاصية الصمود :

مرجح نقطتين متزنتين لا يتغير بضرب معامليهما في عدد حقيقي غير منعدم ،
أي إذا كان G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;k\alpha);(B;k\beta)\}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

ملاحظة :

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ ،
عادة يتم اختيار α و β بحيث $\alpha+\beta=1$ ، ومن أجل هذا نأخذ $k=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ و $a=k\alpha$ و $b=k\beta$.
إذن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;a)$ و $(B;b)$ ولدينا $a+b=1$.

ب) الخاصية المميزة :

نعتبر في المستوى نقطتين متزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ بحيث : $\alpha+\beta\neq 0$ و G نقطة من المستوى ، لدينا :
G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ $\Leftrightarrow$ $\forall M\in(\mathrm{P}):\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

استنتاج :

بوضع $M=A$ في الخاصية السابقة نحصل على $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ ،
- هذه العلاقة تبين أن $G\in(AB)$ أي أن النقط A و B و G مستقيمية ، وتعطينا طريقة لإنشاء G .
- إذا كان للعددين α و β نفس الإشارة فإن $0\leq\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\leq 1$ ومنه نستنتج أن $G\in[AB]$.
- إذا كان α و β مختلفي الإشارة فإن $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}>1$ أو $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}<0$ ومنه نستنتج أن G تنتمي إلى نصف المستقيم الذي أصله B ولا يضم A أو إلى نصف المستقيم الذي أصله A ولا يضم B على التوالي .

تمرين تطبيقي 1 :

نعتبر في المستوى نقطتين مختلفتين A و B ، و I منتصف القطعة $[AB]$ و J منتصف القطعة $[AI]$.
بين أن J مرجح النقطتين المتزنتين $(A;3)$ و $(B;1)$.

$II-$ مرجح ثلاث نقط متزنة :

خاصية وتعريف :

نعتبر في المستوى ثلاث نقط متزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ بحيث : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

- توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$،

وتسمى كذلك مرجح النظمة المتزنة : $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$

ملاحظات :

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ثلاث نقط متزنة .

إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فإن النقط $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ليس لها مرجح إذا كان $A\neq B$ أو $B\neq C$ أو $A\neq C$.

تمرين تطبيقي 2 :

لتكن A و B و C و G نقط من المستوى بحيث $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

حدد أوزان النقط A و B و C علما أن G مرجح هذه النقط .

حالة خاصة :

إذا كان ABC مثلثا وكان $\alpha=\beta=\gamma$ فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ يسمى مركز ثقل المثلث ABC.

خاصيات مرجح ثلاث نقط متزنة :

أ) خاصية الصمود :

مرجح ثلاث نقط متزنة لا يتغير بضرب معاملاتها في عدد حقيقي غير منعدم ،

أي إذا كان G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ فإن G مرجح النظمة المتزنة

$\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma)\}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

ب) الخاصية المميزة :

نعتبر في المستوى ثلاث نقط متزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ بحيث : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ و G نقطة من المستوى ، لدينا :

G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ $\Leftrightarrow$ $\forall M\in(\mathrm{P}):\ \ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

استنتاج :

بوضع $M=A$ في الخاصية السابقة نحصل على علاقة تمكن من إنشاء النقطة G : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

ج) خاصية تجميعية المرجح :

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ ثلاث نقط متزنة من المستوى بحيث : $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ و $\alpha+\beta\neq 0$ ، ليكن H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$.

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ فإن G مرجح النقطتين المتزنتين $(H;\alpha+\beta)$ و $(C;\gamma)$.

نتيجة :

إذا كان ABC مثلثا و G مركز ثقله فإن G هو نقطة تقاطع متوسطات المثلث ABC.

تمرين تطبيقي 3 :

ليكن ABC مثلثا و G مركز ثقله و I و J و K منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي .

1) بين أن G مرجح النظمات المتزنة التالية : $\{(A;1);(I;2)\}$ ، $\{(B;1);(J;2)\}$ و $\{(C;1);(K;2)\}$

2) استنتج أن G هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC.

$III-$ مرجح أربع نقط متزنة أو أكثر :

خاصية وتعريف :

نعتبر في المستوى أربع نقط متزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ بحيث : $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$

- توجد نقطة وحيدة G من المستوى بحيث : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\lambda\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

- النقطة G تسمى مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ ،

وتسمى كذلك مرجح النظمة المتزنة : $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma);(D;\lambda)\}$

ملاحظات :

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ أربع نقط متزنة ، إذا كان $\alpha+\beta+\gamma+\lambda=0$ فإن النقط $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ ليس لها مرجح إذا كانت هناك نقطتين مختلفتين من بين هذه النقط الأربع .

تمرين تطبيقي 4 :

لتكن A و B و C و D و G نقط من المستوى بحيث $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BD}$
حدد أوزان النقط A و B و C و D علما أن G مرجح هذه النقط .

خاصيات مرجح أربع نقط متزنة :

أ) خاصية الصمود :

مرجح أربع نقط متزنة لا يتغير بضرب معاملاتها في عدد حقيقي غير منعدم ،
أي إذا كان G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma);(D;\lambda)\}$ فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;k\alpha);(B;k\beta);(C;k\gamma);(D;k\lambda)\}$ حيث $k\in\mathbb{R}^*$

ب) الخاصية المميزة :

نعتبر في المستوى أربع نقط متزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ بحيث : $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$ و G نقطة من المستوى ، لدينا : G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ $\Leftrightarrow$

$$\forall M\in(\mathrm{P}):\quad \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\lambda\overrightarrow{MD}=(\alpha+\beta+\gamma+\lambda)\overrightarrow{MG}$$

استنتاج :

بوضع $M=A$ في الخاصية السابقة نحصل على علاقة تمكن من إنشاء النقطة G :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{AC}+\frac{\lambda}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\overrightarrow{AD}$$

ج) خاصية تجميعية المرجح :

- لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ أربع نقط متزنة بحيث : $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$ و $\alpha+\beta\neq 0$ و $\gamma+\lambda\neq 0$
ليكن H مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و K مرجح النقطتين المتزنتين $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$.
إذا كان G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma);(D;\lambda)\}$ فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(H;\alpha+\beta);(K;\gamma+\lambda)\}$

- لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ أربع نقط متزنة من المستوى بحيث : $\alpha+\beta+\gamma+\lambda\neq 0$ و $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$،
ليكن L مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$
إذا كان G مرجح النظمة المتزنة $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma);(D;\lambda)\}$ فإن G مرجح النظمة المتزنة $\{(L;\alpha+\beta+\gamma);(D;\lambda)\}$

IV– إحداثيتا المرجح :

المستوى منسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ ، لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ أربع نقط متزنة من المستوى ،
و $(x_A;y_A)$ و $(x_B;y_B)$ و $(x_C;y_C)$ و $(x_D;y_D)$ أزواج إحداثياتها على التوالي .

خاصيات :

إذا كان G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فإن إحداثيتي النقطة G هي :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{cases}$$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ فإن إحداثيتي النقطة G هي :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\end{cases}$$

إذا كان G مرجح النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\gamma)$ و $(D;\lambda)$ ،
فإن إحداثيتي النقطة G هي :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\lambda x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\lambda y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\lambda}\end{cases}$$

تمرين تطبيقي 5 :

حدد إحداثيتي مركز ثقل المثلث ABC حيث : $A(3;5)$ و $B(1;2)$ و $C(-1;-1)$