عموميات حول الدوال

$I-$ الدالة المكبورة ـ الدالة المصغورة ـ الدالة المحدودة :

نشاط 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

1) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ : f(x)<1$

2) أ) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ : f(x)\geq 0$

ب) استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ : 0\leq f(x)<1$

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I ضمن $\mathbb{R}$.

- نقول إن f مكبورة على المجال I إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي M بحيث : $(\forall x\in I):\ f(x)\leq M$
- نقول إن f مصغورة على المجال I إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي m بحيث : $(\forall x\in I):\ m\leq f(x)$
- نقول إن f محدودة على المجال I إذا وفقط إذا كانت مكبورة و مصغورة على المجال I.

أمثلة :

الدالة $x\mapsto x^2$ مصغورة على $\mathbb{R}$ ، لأنه يوجد $m=0\in\mathbb{R}$ بحيث : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ m\leq x^2=f(x)$

الدالة $x\mapsto 1-|x|$ مكبورة على $\mathbb{R}$ ، لأنه يوجد $M=1\in\mathbb{R}$ بحيث : $(\forall x\in\mathbb{R}):\ f(x)=1-|x|\leq 1=M$

الدالة $x\mapsto \cos x$ محدودة على $\mathbb{R}$ ، لأنها مكبورة (بـ 1) و مصغورة (بـ -1) على $\mathbb{R}$.

نشاط 2 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I .

1- نفترض أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث : $(\forall x\in I):\ |f(x)|\leq k$ ، بين أن الدالة f محدودة على I .

2- نفترض أن الدالة f محدودة على I ، بين أنه يوجد عدد حقيقي k بحيث : $(\forall x\in I):\ |f(x)|\leq k$

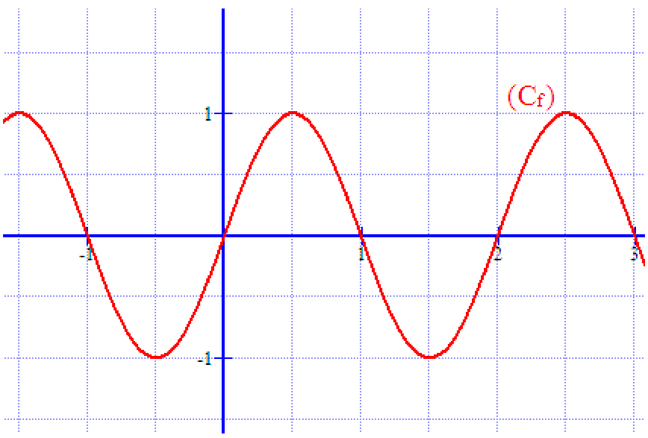
خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

تكون f دالة محدودة على المجال I إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي k بحيث : $(\forall x\in I):\ |f(x)|\leq k$

$II-$ الدالة الدورية :

نشاط 3 :



1) الشكل جانبه هو تمثيل مبياني لدالة عددية f معرفة على $\mathbb{R}$.

أ) تحقق من أن : $f(1)=f(3)$ وأن : $f(-1)=f(1)$

وأن : $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$

ب) تظنن العلاقة بين $f(x)$ و $f(x+2)$ حيث $x\in\mathbb{R}$

2) الدالة الممثلة جانبه هي الدالة المعرفة كما يلي :

$f(x)=\sin(\pi x)$

أ) باستعمال صيغة f تأكد من نتائج السؤال 1) أ)

ب) بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x+2)=f(x)$

تعريف :

لتكن f دالة عددية و D مجموعة تعريفها .

- نقول إن f دورية إذا وجد عدد حقيقي موجب قطعا T بحيث : $(1)\ (\forall x\in D/(x+T)\in D):\ f(x+T)=f(x)$
- أصغر عدد حقيقي موجب قطعا T يحقق (1) يسمى دور الدالة f .

أمثلة :

الدالة $x\mapsto\cos x$ دورية ودورها 2π .

الدالة $x\mapsto\sin x$ دورية ودورها 2π .

الدالة $x\mapsto\tan x$ دورية ودورها π .

خاصية :

إذا كان T دور لدالة عددية f معرفة على مجموعة D ، فإنه لكل k من $\mathbb{Z}$ لدينا :

$(\forall x\in D/x+kT\in D):f(x+kT)=f(x)$

ملاحظات هامة :

إذا كانت f دالة عددية و D مجموعة تعريفها و T دور لها فإنه :

- لدراسة تغيرات الدالة f على D ، يكفي دراسة تغيراتها فقط على المجموعة $[0;T]\cap D$ أو $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]\cap D$.

- يستنتج منحنى الدالة f على D انطلاقا من منحناها فقط على المجموعة $[0;T]\cap D$ أو $\left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]\cap D$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(T;0)$ أو $\vec{u}(-T;0)$.

تمرين تطبيقي 1 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\cos(2x)-\sin(2x)$.

1- بين أن الدالة f مكبورة بـ 2 ومصغورة بـ -2 على $\mathbb{R}$.

2- بين أن الدالة f دورية و π دور لها .

III– مطاريف دالة عددية :

1- القيمة القصوى :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ، و $x_0\in D_f$.

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة القصوى (أو القيمة القصوى المطلقة) للدالة f إذا كان : $\forall x\in D_f\ :\ f(x)\leq f(x_0)$

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة قصوى نسبية للدالة f إذا وُجد مجال مفتوح $I\subset D_f$ بحيث $x_0\in I$ و $\forall x\in I : f(x)\leq f(x_0)$

2) القيمة الدنيا :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f حيز تعريفها ، و I مجالا مفتوحا ضمن D_f و $x_0\in I$.

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو القيمة الدنيا (أو القيمة الدنيا المطلقة) للدالة f إذا كان : $\forall x\in D_f\ :\ f(x_0)\leq f(x)$

نقول إن العدد $f(x_0)$ هو قيمة دنيا نسبية للدالة f إذا وُجد مجال مفتوح $I\subset D_f$ بحيث $x_0\in I$ و $\forall x\in I\ :\ f(x_0)\leq f(x)$

3) المطراف :

تعريف :

لتكن f دالة عددية ، إذا كان العدد $f(x_0)$ قيمة قصوى أو دنيا للدالة f ، فإننا نقول إن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مطراف للدالة f .

تمرين تطبيقي 2 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1) بين أن 2 هي القيمة القصوى المطلقة لـ f .

2) بين أن $\frac{2}{3}$ هي القيمة الدنيا المطلقة لـ f .

IV– مقارنة دالتين – التأويل الهندسي :

1- تساوي دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و D_f و D_g على التوالي حيزي تعريفيهما.

نقول إن f تساوي g ونكتب $f=g$ إذا وفقط إذا كان : $D_f=D_g$ و $\forall x\in D_f : f(x)=g(x)$

تمرين تطبيقي 3 :

1) لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ و $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

بين أن : $f=g$.

2) هل الدالتين العدديتين u و v المعرفتين كما يلي متساويتين ؟ $u(x)=\sqrt{x^3+x^2}$ و $v(x)=x\sqrt{x+1}$.

2- مقارنة دالتين :

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين و I مجال ضمن مجموعتي تعريفهما .

- نقول إن f أصغر من أو تساوي g على المجال I ونكتب $f\leq g$ إذا وفقط إذا كان : $\forall x\in I : f(x)\leq g(x)$

- نقول إن f أصغر قطعا من g على المجال I ونكتب $f<g$ إذا وفقط إذا كان : $\forall x\in I : f(x)<g(x)$

مثال :

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=2x$ و $g(x)=x^2+1$ بين أن : $f\leq g$ على $\mathbb{R}$.

3- تأويلات هندسية :

لتكن f و g دالتين عدديتين منحنييهما على التوالي هما (C_f) و (C_g)، و I مجالا ضمن مجموعتي تعريفهما ، و c عددا حقيقيا .
- إذا كان $f \le g$ على المجال I فإنه هندسيا يكون (C_f) تحت (C_g) على المجال I.
- إذا كان $f \le c$ على المجال I فإنه هندسيا يكون (C_f) تحت المستقيم $(\Delta): y = c$ على المجال I.
- حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ على المجال I، هي أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع (C_g) على المجال I.
- حلول المعادلة $f(x) = c$ على المجال I، هي أفاصيل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم $(\Delta): y = c$ على المجال I.
- حلول المتراجحة $f(x) \le g(x)$ على المجال I، هي أفاصيل نقط (C_f) التي توجد تحت (C_g) على المجال I.
- حلول المتراجحة $f(x) \le c$ على المجال I، هي أفاصيل نقط (C_f) التي توجد تحت المستقيم $(\Delta): y = c$ على المجال I.

تمرين تطبيقي 4 :

لتكن f و g الدالتين المعرفتين بـ : $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = -x^2 + 4x - 3$

1) أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم (C_f) و (C_g) منحنيي الدالتين f و g على التوالي .

2) حل مبيانيا ثم جبريا المعادلات التالية : $f(x) = g(x)$ ، $f(x) = 1$ و $g(x) = 0$.

3) حل مبيانيا ثم جبريا المتراجحات $f(x) \le g(x)$ و $f(x) > g(x)$ و $g(x) \ge 0$.

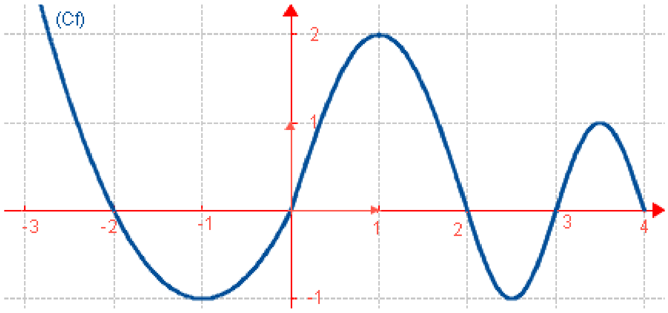
4- صورة مجال بدالة عددية :

نشاط 4 :

نعتبر الدالة العددية f الممثلة جانبه :

أحسب صورة المجالات التالية بالدالة f :

$[0;1[$ ، $[0;3]$ ، $[-1;1[$ و $]-2;3[$ و $[-2;3]$.



تعريف :

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها D_f و A مجال ضمن D_f و B مجموعة ضمن ℝ .

نقول إن المجموعة B هي صورة المجموعة A بالدالة f ونكتب $B = f(A)$ إذا كان : $B = \{f(x) / x \in A\}$

V – العمليات على الدوال :

1- مجموع وجداء وخارج دالتين :

نشاط 5 :

لتكن f و g دالتين معرفتين على ℝ بما يلي : $f(x) = x - 5$ و $g(x) = x^2 - x + 2$

أعط تعبير الدالة h في كل حالة من الحالات التالية :

1) $h(x) = f(x) + g(x)$

2) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

3) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

4) $h(x) = \dfrac{2f(x) - 3g(x)}{g(x) + 1}$

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على نفس المجموعة I ، و k عدد حقيقي .
- مجموع الدالتين f و g نرمز له بالرمز $f + g$ ، هو الدالة المعرفة على I بما يلي : $\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- جداء الدالتين f و g نرمز له بالرمز $f.g$ ، هو الدالة المعرفة على I بما يلي : $\forall x \in I : (f.g)(x) = f(x) \times g(x)$
- جداء الدالة f في العدد الحقيقي k نرمز له بالرمز $k.f$ ، هو الدالة المعرفة على I بما يلي : $\forall x \in I : (k.f)(x) = k.f(x)$

و إذا كانت g لا تنعدم على I فإن :
- خارج الدالتين f و g نرمز له بالرمز $\dfrac{f}{g}$ ، هو الدالة المعرفة على I بما يلي : $\forall x \in I : \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
- مقلوب الدالة g نرمز له بالرمز $\dfrac{1}{g}$ ، هو الدالة المعرفة على I بما يلي : $\forall x \in I : \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

2- مركب دالتين :

نشاط 6 :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بما يلي : $f(x) = -x + 5$ و $g(x) = \sqrt{x}$

1- حدد D_f و D_g ثم أحسب $f(1)$ ، $f(-4)$ و $f(8)$ ثم استنتج قيمة $g(f(1))$ و $g(f(-4))$.

2- هل يمكن حساب $g(f(8))$ ؟ استنتج مجالا I بحيث لكل x من I يمكن حساب قيمة $g(f(x))$.

تعريف :

لتكن f و g دالتين عدديتين مجموعتي تعريفهما على التوالي D_f و D_g ، نضع $D=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$
الدالة h المعرفة على D بما يلي : $\forall x\in D : h(x)=g\left(f(x)\right)$ تسمى مركب الدالتين f و g (في هذا الترتيب)، ويرمز لها بالرمز $g\circ f$.

أي : $\forall x\in D : h(x)=(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)$

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$\underbrace{x \mapsto f(x) \mapsto g\left(f(x)\right)}_{h=g\circ f}$$

ملاحظات :

- عمليا ، من أجل تحديد مجموعة تعريف $g\circ f$ نحدد D_f و D_g ثم نحدد المجموعة :

$$D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R} / x\in D_f \text{ و } f(x)\in D_g\}$$

- بصفة عامة : $g\circ f \neq f\circ g$

تمرين تطبيقي 5 :

1- لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كما يلي : $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$

a) حدد D_f و D_g ثم حدد $D_{g\circ f}$ و $D_{f\circ g}$.

b) أحسب $g\circ f(x)$ لكل x من $D_{g\circ f}$ ثم أحسب $f\circ g(x)$ لكل x من $D_{f\circ g}$.

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

حدد D_f و $D_{f\circ f}$ ثم أحسب $f\circ f(x)$ لكل x من $D_{f\circ f}$.

$VI-$ رتابة دالة عددية :

1) منحى تغيرات دالة عددية :

تعريف :

لتكن f دالة عددية و I مجالا ضمن مجموعة تعريفها .

- تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)(\forall y\in I)\ x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y)$
- تكون f تزايدية قطعا على I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)(\forall y\in I)\ x< y \Rightarrow f(x)< f(y)$
- تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)(\forall y\in I)\ x\le y \Rightarrow f(x)\ge f(y)$
- تكون f تناقصية قطعا على I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)(\forall y\in I)\ x< y \Rightarrow f(x)> f(y)$
- تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان : $(\forall x\in I)(\forall y\in I)\ f(x)=f(y)$

ملاحظات :

نقول إن f رتيبة على مجال I إذا كانت إما تزايدية وإما تناقصية على المجال I.
نقول إن f رتيبة قطعا على مجال I إذا كانت إما تزايدية قطعا وإما تناقصية قطعا على المجال I.
يمكن دراسة رتابة دالة عددية f على مجال I بدراسة إشارة معدل التغير : $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ حيث x و y من I و $x\neq y$.

مثال :

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x}+1$.
بين باستعمال التعريف السابق ثم باستعمال معدل التغير أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$.

2) الرتابة وزوجية دالة عددية (تذكير):

أ- تعريف :

لتكن f دالة عددية و D_f مجموعة تعريفها .

نقول إن الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f لدينا : $\begin{cases}(-x)\in D_f \\ f(-x)=f(x)\end{cases}$ و

نقول إن الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان لكل x من D_f لدينا : $\begin{cases}(-x)\in D_f \\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$ و

أمثلة :

1) بين أن الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ فردية وأن الدالة $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-16}$ زوجية .

2) أدرس زوجية كل دالة من الدوال المعرفة أسفله :

$f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=-x^2+3$ ، $h(x)=2x^3$ و $k(x)=2x+1$

ملاحظة هامة :

- إذا كانت f دالة عددية غير زوجية فهذا لا يعني بالضرورة أنها فردية .
- إذا كانت f دالة عددية غير فردية فهذا لا يعني بالضرورة أنها زوجية .

ب- التأويل المبياني لزوجية دالة :

لتكن f دالة عددية و (C_f) منحناها في معلم متعامد .

تكون الدالة f زوجية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لمحور الأراتيب .

تكون الدالة f فردية إذا وفقط إذا كان (C_f) متماثل بالنسبة لأصل المعلم .

خاصية :

لتكن f دالة عددية مجموعة تعريفها D_f متماثلة بالنسبة لصفر،

ليكن I مجالا ضمن D_f وضمن $\mathbb{R}^+$ و I' مماثل I بالنسبة لصفر.

* إذا كانت f دالة **زوجية** فإن :

f تزايدية (تزايدية قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية (تناقصية قطعا) على I'

f تناقصية (تناقصية قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية (تزايدية قطعا) على I'

* إذا كانت f دالة **فردية** فإن :

f تزايدية (تزايدية قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تزايدية (تزايدية قطعا) على I'

f تناقصية (تناقصية قطعا) على I $\Leftrightarrow$ f تناقصية (تناقصية قطعا) على I'

ملاحظة :

D_f مجموعة متماثلة بالنسبة لصفر يعني $(\forall x \in D_f):(-x)\in D_f$.

I' مماثل I بالنسبة لصفر يعني $\forall x \in \mathbb{R} : (x \in I) \Leftrightarrow ((-x)\in I')$

تمرين تطبيقي 6 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^4-x^2$.

1) بين أن f دالة زوجية .

2) أ) أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $\left[0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ و $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

ب) استنتج جدول تغيرات الدالة f على D_f.

3) رتابة مركب دالتين رتيبتين :

نشاط 7 :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي على مجالين I و J ، بحيث $f(I)\subset J$

نفترض أن f و g رتيبتين قطعا على التوالي على المجالين I و J،

أدرس رتابة gof على I حسب رتابة كل من f و g .

خاصية :

لتكن f و g دالتين عدديتين معرفتين على التوالي مجالين I و J ، بحيث $f(I)\subset J$

- إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فإن gof تزايدية قطعا على I.
- إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فإن gof تزايدية قطعا على I.
- إذا كانت f تزايدية قطعا على I و g تناقصية قطعا على J فإن gof تناقصية قطعا على I.
- إذا كانت f تناقصية قطعا على I و g تزايدية قطعا على J فإن gof تناقصية قطعا على I.

4) رتابة الدالتين $f+\lambda$ و $\lambda \cdot f$:

نشاط 8 :

لتكن f دالة عددية رتيبة قطعا على مجال I و λ عددا حقيقيا غير منعدما ،

1) نعتبر الدالة g المعرفة على I بما يلي : $g(x)=f(x)+\lambda$

أدرس رتابة الدالة g على I.

2) نعتبر الدالة h المعرفة على I بما يلي : $h(x)=\lambda \cdot f(x)$

أدرس رتابة الدالة h على I.

خاصية :

لتكن f دالة عددية رتيبة قطعا على مجال I و λ عددا حقيقيا غير منعدما ،
- الدالة $f+\lambda$ لها نفس رتابة الدالة f .
- إذا كان $\lambda>0$ فإن $\lambda\cdot f$ لها نفس رتابة الدالة f ، وإذا كان $\lambda<0$ فإن $\lambda\cdot f$ لها عكس رتابة الدالة f .

تمرين تطبيقي 7 :

نعتبر الدوال العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad h(x)=\frac{2x-1}{x+1} \quad \text{و} \quad k(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

1) حدد D_f و D_g و D_h و D_k.
2) بين أن $\forall x\in D_h :\ h(x)=2-3g(x)$.
3) أدرس تغيرات الدالتين f و g على D_f و D_g على التوالي .
4) استنتج تغيرات الدالتين h و k على D_h و D_k على التوالي .

VII- التمثيل المبياني للدالتين $x\mapsto\sqrt{x+a}$ و $x\mapsto ax^3$:

1- دراسة الدالة $f:x\mapsto\sqrt{x+a}$ حيث $a\in\mathbb{R}$:

- مجموعة التعريف :

$$\begin{aligned}D_f&=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x+a\geq 0\}\\&=\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq -a\}\\&=[-a;+\infty[\end{aligned}$$

- تغيرات الدالة f :

الدالة f هي مركب الدالة $x\mapsto x+a$ وهي تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ ، والدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ وهي تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$،
إذن الدالة f تزايدية قطعا على D_f ، ونلخص هذه النتائج في :

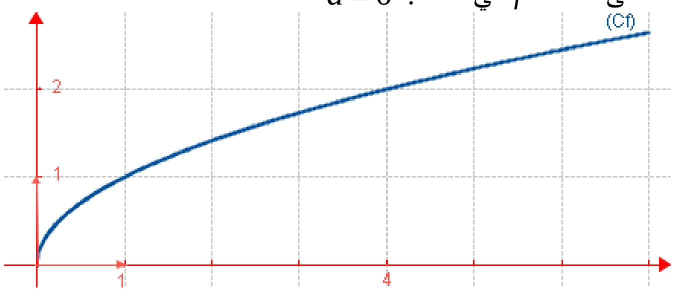
- جدول التغيرات :

x	$-a$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$

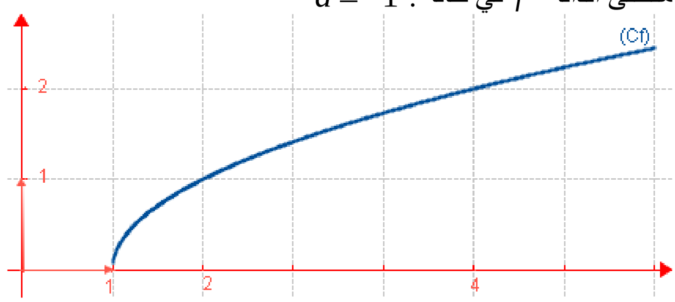
- منحنى الدالة f :

منحنى الدالة f في الحالات :
$a=0$ و $a=-1$ و $a=2$

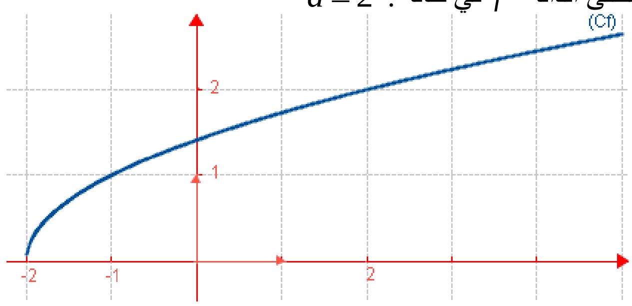
منحنى الدالة f في حالة : $a=0$



منحنى الدالة f في حالة : $a=-1$



منحنى الدالة f في حالة : $a=2$



ملاحظة :

منحنى الدالة $x\mapsto\sqrt{x+a}$ يمكن استنتاجه من منحنى الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}=-a\vec{i}$.

2- دراسة الدالة $f: x \mapsto ax^3$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$:

- مجموعة التعريف :

$D_f = \mathbb{R}$ لأن f دالة حدودية .

- زوجية الدالة f :

f دالة فردية لأن D_f متماثلة بالنسبة للصفر ولدينا : $\forall x \in D_f : f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$

إذن يكفي دراسة تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^+$.

- تغيرات الدالة f :

ليكن x و y من $\mathbb{R}^+$ بحيث $x < y$ ، لدينا : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

إذن هناك حالتان :

الحالة 1 :

إذا كان $a > 0$ فإن $x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 < ay^3$ ومنه $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

وبالتالي f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ وكذلك f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^-$ لأن f دالة فردية.

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

الحالة 2 :

إذا كان $a < 0$ فإن $x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 > ay^3$ ومنه $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

وبالتالي f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^+$ وكذلك f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}^-$ لأن f دالة فردية.

إذن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$.

- جدول التغيرات :

الحالة 1 :

إذا كان $a > 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

الحالة 2 :

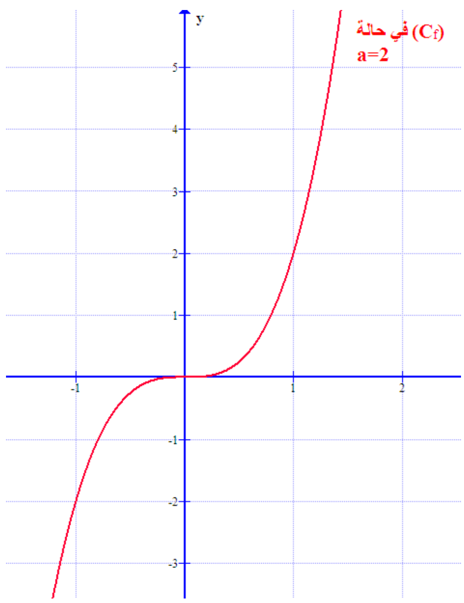
إذا كان $a < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

- منحنى الدالة f :

منحنى الدالة f :

في حالة $a = 2$



في حالة $a = -\frac{1}{4}$