

Exercice 1:(10.5pts)

1 - Écrivez les propositions suivantes en utilisant des quantificateurs et des connecteurs logiques :

1 Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  il existe un nombre  $k$  dans  $\mathbb{N}$  tel que  $n = 2k$

1 Quel que soit  $x$  dans  $\mathbb{R}$  il est positif

1.5 2 - Donnez la table de vérité de la proposition suivante  $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$   
Que concluez-vous ?

1.5 3 - En utilisant la preuve par contraposée, montrez que :

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \{1\})(\forall y \in \mathbb{R} - \{1\}) \quad x \neq y \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} \neq \frac{y+1}{y-1}$$

4 - Soit  $x$  un nombre réel positif:

1.5 - Montrez que  $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

1.5 - Montrez que  $0 < \sqrt{1+x^2} - x < \frac{1}{2x}$

1 5 - Montrez par l'absurde que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

1.5 6 - Montrez par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 2:(9.5 pts)

1.5 × 3 1 - Déterminez le domaine de définition  $D_f$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} ; f(x) = \frac{3x+2}{x+1} ; f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+3x-4}$$

2 - Considérons les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies par :  $f(x) = \frac{2x+4}{x^2+1} ; g(x) = \sqrt{x}$

1 - Déterminez  $D_f$  et  $D_g$

1 - Déterminez le domaine de définition de  $g \circ f$  la composée des deux fonctions

1 - Déterminez  $(g \circ f)(x)$

3 - Considérons la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

1 - Montrez que la fonction  $f$  atteint une valeur minimale au point 0

1 - Déterminez les points d'intersection de la courbe de la fonction avec les axes du repère

