Devoir surveillé n°1

Un point de plus sur la clarté des raisonnements et la propreté de la feuille

Exercice 1 : *5.5pts*

1 − On considère la proposition $(P) : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; |x-y| \leq 2\sqrt{x^2+xy+y^2}$.
1.5 (a) Montrer par des équivalences successives que la proposition (P) est vraie.
0.5 (b) Nier la proposition P.
1.5 **2** − Posons $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = 1+3+5+\cdots+(2n+1)$.
Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N} : S_n = (n+1)^2$.
1 **3** − Montrer par la contre-posé que $\forall n \in \mathbb{N} : n^2+n$ est impair.
1 **4** − En utilisant la disjonction des cas, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2+1} = 2x$.
1 **5** − Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $2(a^2+b^2) = 5ab$. Montrer par l'absurde que $a \neq b$.

Exercice 2 : *14.5pts*

Partie 1 : *4.5pts*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

1 **a.** Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : x^2+x+1 > 0$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : y = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \in]0,1]$.
1 **b.** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$: Montrer que $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{2(xy-1)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$.
1 **c.** Montrer que f est décroissante sur $[-1,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.
1.5 **d.** Déduire le tableau de variations de f sur $[-1,+\infty[$.

Partie 2 : *7.5pts*

Soient g une fonction telle que $g(x) = \sqrt{x+1}$ et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé.
On considère la droite (D) d'équation cartésienne $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

1 Vérifier que $D_g = [-1,+\infty[$.
1.5 Montrer que g est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.
1 Calculer $g(-1)$, $g(3)$ puis construire dans le même repère la courbe (C_g) et la droite (D).
1.5 Déterminer graphiquement l'image de l'intervalle $[-1,0]$ et celle de $[0,+\infty[$ par g.
1 Résoudre graphiquement l'équation $\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
1.5 Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+1} \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Partie 3 : *2.5pts*

On considère la fonction h définie sur $[-1,+\infty[$ par $h(x) = \frac{x+2-\sqrt{x+1}}{x+2+\sqrt{x+1}}$.

1 Vérifier que $\forall x \in [-1,+\infty[: f \circ g(x) = h(x)$.
1.5 Déterminer le sens de variations de h sur les intervalles $]-1,0]$ et $[0,+\infty[$.

Bonne chance à tous