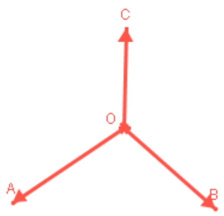
تحليلية الفضاء

$I-$ المعلم الديكارتي في الفضاء :

1) تعريف :

لتكن O و A و B و C أربع نقط من الفضاء،
إذا كانت النقط O و A و B و C غير مستوائية فإن المربوع
$\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$ يسمى معلما ديكارتيا للفضاء $\mathcal{E}$.

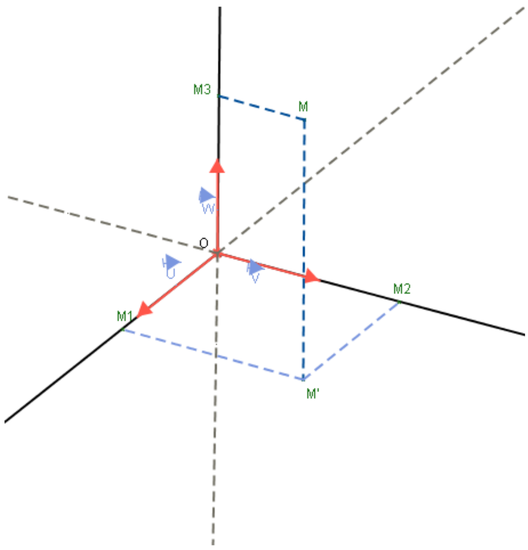


ملاحظات :

1) إذا كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية و o نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$
فإن $\left(o;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ معلم للفضاء $\mathcal{E}$ ، و $\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ أساس للفضاء المتجهي $\mathcal{V}_3$.

2) إذا كانت المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية ومتعامدة مثنى مثنى فإن $\left(o;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ يسمى معلما متعامدا ، وإذا كان $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$ فإن المعلم $\left(o;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ يسمى معلما ممنظما .

2) إحداثيات نقطة في معلم في الفضاء :



ليكن الفضاء منسوب إلى معلم $\left(o;\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ ، نعتبر المستقيمات

$\left(D_1\right)=D_1\left(o;\vec{u}\right)$ و $\left(D_2\right)=D_2\left(o;\vec{v}\right)$ و $\left(D_3\right)=D_3\left(o;\vec{w}\right)$

والمستويات $\left(P_1\right)=P_1\left(o;\vec{v};\vec{w}\right)$ و $\left(P_2\right)=P_2\left(o;\vec{u};\vec{w}\right)$ و

$\left(P_3\right)=P_3\left(o;\vec{u};\vec{v}\right)$، لتكن M نقطة من الفضاء $\mathcal{E}$

ولتكن M' المسقط العمودي للنقطة M على $\left(P_3\right)$ بتواز مع المستقيم $\left(D_3\right)$

وفي المستوى $\left(P_3\right)$ نعتبر:

M_1 المسقط العمودي للنقطة M' على $\left(D_1\right)$ بتواز مع المستوى $\left(D_2\right)$

و M_2 المسقط العمودي للنقطة M' على $\left(D_2\right)$ بتواز مع المستوى $\left(D_1\right)$

ولتكن M_3 المسقط العمودي للنقطة M على $\left(D_3\right)$ بتواز مع المستوى $\left(P_3\right)$

لدينا $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM_3}$ و $\overrightarrow{OM'}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$

إذن $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$ ،وبالتالي: $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}+z\vec{w}$ حيث x و y و z من $\mathbb{R}$.

المثلوث $\left(x;y;z\right)$ يسمى مثلوث إحداثيات M .

x يسمى أفصول النقطة M ، y يسمى أرتوب M و z يسمى أنسوب M .

خاصية :

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، لكل نقطة M من الفضاء يوجد مثلوث وحيد $\left(x;y;z\right)$ من $\mathbb{R}^3$ بحيث
$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ ، المثلوث $\left(x;y;z\right)$ يسمى مثلوث إحداثيات M في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.
x يسمى أفصول النقطة M ، y يسمى أرتوب M و z يسمى أنسوب M .

3) الشرط التحليلي لاستقامية متجهتين في الفضاء :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، لتكن $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ و $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ متجهتين من $\mathcal{V}_3$.

تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ ،

نفترض أن $\vec{v}=\alpha\vec{u}$ ، يعني : $x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}=\alpha\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$

يعني : $\begin{cases} x'=\alpha x \\ y'=\alpha y \\ z'=\alpha z \end{cases}$ يعني $x'y-xy'=0$ و $y'z-yz'=0$ و $x'z-xz'=0$.

خاصية :

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، لتكن $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ و $\vec{v}\left(x';y';z'\right)$ متجهتين من $\mathcal{V}_3$.
تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان $x'y-xy'=y'z-yz'=x'z-xz'=0$

الأعداد $x'y-xy'$ و $y'z-yz'$ و $x'z-xz'$ تسمى المحددات المستخرجة للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

$$d_1=\begin{vmatrix} \cancel{x} & \cancel{x'} \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=yz'-y'z \qquad d_2=\begin{vmatrix} x & x' \\ \cancel{y} & \cancel{y'} \\ z & z' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}=zx'-z'x \qquad d_3=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ \cancel{z} & \cancel{z'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$$

تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا كان : $d_1=d_2=d_3=0$

استنتاج :

تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين إذا وفقط إذا كان : $d_1\neq 0$ أو $d_2\neq 0$ أو $d_3\neq 0$.

مثال :

نعتبر المتجهتين : $\vec{u}(1;-1;2)$ و $\vec{v}(3;2;-1)$.

أدرس استقامية المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

4) الشرط التحليلي لاستوائية ثلاث متجهات في الفضاء :

خاصيات :

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$،

لتكن $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$ و $\vec{w}(x'';y'';z'')$ ثلاث متجهات من الفضاء المتجهي υ_3.

تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا كان :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}=0$$