التمثيل المبياني لدالة عددية

I– المستقيمات المقاربة :

في جميع فقرات الدرس ، المستوى منسوب إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) المقارب الأفقي :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;+\infty[$ (أو على $]-\infty;a[$) و $\left(C_f\right)$ منحناها .
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (على التوالي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$) حيث $b\in\mathbb{R}$ فإننا نقول إن المستقيم $\left(D\right)$ ذو المعادلة $y=b$ مقارب موازي لمحور الأفاصيل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (على التوالي $-\infty$).

2) المقارب العمودي :

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]a;a+\alpha[$ (على التوالي $]a-\alpha;a[$) حيث $\alpha>0$ و $\left(C_f\right)$ منحناها .
إذا كانت $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ (على التوالي $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\pm\infty$) فإننا نقول إن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذو المعادلة $x=a$ مقارب موازي لمحور الأراتيب لـ $\left(C_f\right)$.

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-4}$ و $\left(C_f\right)$ منحناها .

1) بين أن المستقيم $\left(D\right)$ ذو المعادلة $y=\dfrac{3}{2}$ مقارب أفقي لـ $\left(C_f\right)$ بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

2) بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذو المعادلة $x=2$ مقارب عمودي لـ $\left(C_f\right)$.

3) المقارب المائل :

تعريف :

لتكن f دالة عددية تقبل نهاية لامنتهية بجوار $+\infty$ (على التوالي $-\infty$).
إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ (على التوالي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$) حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$ فإننا نقول إن المستقيم $\left(D\right)$ ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (على التوالي $-\infty$).

مثال :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$ و $\left(C_f\right)$ منحناها .

1) بين أن $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x-1}$ لكل x من $\mathbb{R}$.

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)$.

3) أول النتائج هندسيا .

خاصية :

يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لمنحنى دالة f بجوار $+\infty$ (على التوالي $-\infty$) إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$$

(على التوالي $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$)

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$ و $\left(C_f\right)$ منحناها .

باستعمال الخاصية ، بين أن المستقيم ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

II– الفروع الشلجمية :

في هذه الفقرة نعتبر دالة عددية f تقبل نهاية لامنتهية بجوار $+\infty$ و $(-\infty)$ منحناها (C_f) في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل :

تعريف :

إذا كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ ($\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$) فإننا نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ $(-\infty)$

2) فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب :

تعريف :

إذا كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ ($\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$) فإننا نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ $(-\infty)$

تمرين تطبيقي :

1) بين أن (C_f) منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt{x}$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

2) بين أن (C_f) منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^2$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$

3) فرع شلجمي في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ حيث $a\neq 0$:

تعريف :

إذا كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$ (على التوالي $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=\pm\infty$)

فإننا نقول إن (C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$ (على التوالي $-\infty$)

تمرين تطبيقي :

بين أن منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x)=2x+\sqrt{x}$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=2x$ بجوار $+\infty$

III– تقعر منحى – نقط انعطاف منحنى :

تعريف :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0\in I$ و (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد .

- نقول إن (C_f) محدب، أو للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو الأعلى إذا كان يوجد فوق جميع مماساته .
- نقول إن (C_f) مقعر، أو للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو الأسفل إذا كان يوجد تحت جميع مماساته .
- نقول إن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) إذا تغير تقعر (C_f) عند النقطة A .

أمثلة : منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^3$ محدب على $\mathbb{R}^+$ و مقعر على $\mathbb{R}^-$ و $o(0;0)$ نقطة انعطاف له .

خاصية :

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f) منحناها في مستوى منسوب إلى معلم متعامد .

✱ إذا كانت " f موجبة قطعا على I فإن (C_f) محدب على المجال I.

✱ إذا كانت " f سالبة قطعا على I فإن (C_f) مقعر على المجال I.

✱ إذا انعدمت " f في نقطة x_0 من I وغيرت إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

تمرين تطبيقي :

بين أن منحنى الدالة f المعرفة بـ $f(x)=x^3$ محدب على $\mathbb{R}^+$ و مقعر على $\mathbb{R}^-$ و $o(0;0)$ نقطة انعطاف له .

IV– محور تماثل – مركز تماثل منحنى :

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجموعة D و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم ، و a من $\mathbb{R}$ ،

المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل للمنحنى (C_f) $\Leftrightarrow$ $\forall x\in D:\ \left.\begin{matrix}(2a-x)\in D\\ f(2a-x)=f(x)\end{matrix}\right\}$

النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) $\Leftrightarrow$ $\forall x\in D:\ \left.\begin{matrix}(2a-x)\in D\\ f(2a-x)=2b-f(x)\end{matrix}\right\}$

تمرين تطبيقي :

1- بين أن النقطة $I(1;3)$ مركز تماثل لـ (C_f) منحنى الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$.

2- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تماثل لـ (C_g) منحنى الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=x^2-4x+3$.