Etude d'une fonction numérique

MOSAID Radouan

1BAC Science

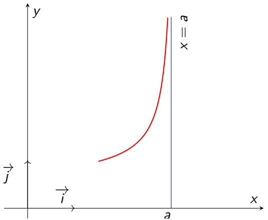
03/04/2023

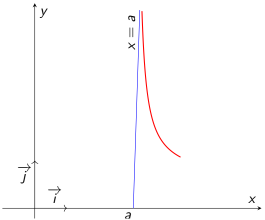
1 - Asymptotes

1. Asymptote verticale

Propriété

Soit $\boldsymbol{a}$ *un nombre reel, si* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ *alors la droite (verticale) d'équation* $x = a$ *est une Asymptote de* C_f





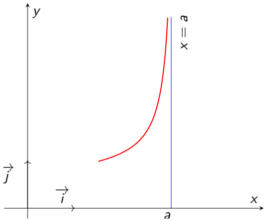
Exemple

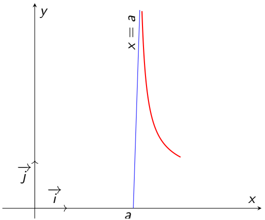
$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

1. Asymptote verticale

Propriété

Soit $\boldsymbol{a}$ *un nombre reel, si* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ *alors la droite (verticale) d'équation* $x = a$ *est une Asymptote de* C_f





Exemple

$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

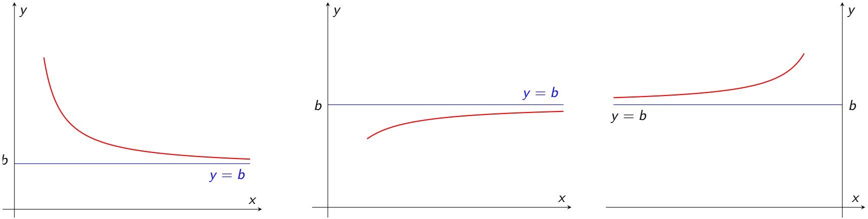
On a $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

Alors la droite $x = -1$ *est une asymptote verticle de* C_f

2. Asymptote horizontale

Propriété

Soit $\boldsymbol{b}$ *un nombre reel, si* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ *alors la droite (horizontale) d'équation* $y = b$ *est une Asymptote de* C_f



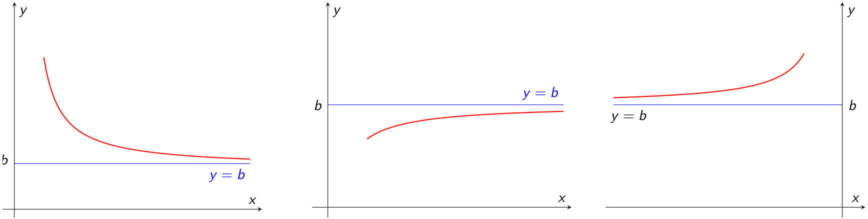
Exemple

$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

2. Asymptote horizontale

Propriété

*Soit **b** un nombre reel, si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ *alors la droite (horizontale) d'équation* $y = b$ *est une Asymptote de* C_f



Exemple

$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

$$\text{On a } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

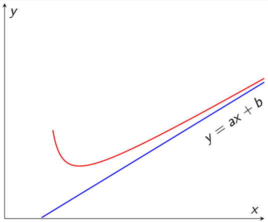
Alors la droite $y = 2$ *est une asymptote horizontale de* C_f *au voisinage de* $-\infty$ *et au voisinage de* $+\infty$

3. asymptote oblique

Définition

La droite d'équation $y = ax + b$ *est une asymptote oblique de* C_f *ssi*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$



Propriété

La droite d'équation $y = ax + b$ *est une asymptote oblique de* C_f *ssi il existe une fonction* h *telle que* $f(x) = ax + b + h(x)$ *et*

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Exemple

$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$

Exemple

$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$ *On a* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

Alors $y = x - 2$ *est asymptote oblique de* C_f *au voisinage de* $+\infty$

Exemple

$f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-1}$ *On a* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad f(x) = x - 2 - \frac{1}{x-1}$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

Alors $y = x - 2$ *est asymptote oblique de* C_f *au voisinage de* $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

Alors $y = x - 2$ *est asymptote oblique de* C_f *au voisinage de* $-\infty$

Remarque

Généralement, il est difficile d'écrir $f(x) = ax + b + h(x)$ *tel que* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} h(x) = 0$

Technique pour trouver l'asymptote oblique

Supposant que $f(x) = ax + b + h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x}h(x) = a$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to+\infty} (b + \frac{1}{x}h(x)) = b$

reciproquement : si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$

alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

Remarque

Etudier le signe de $(f(x) - (ax + b))$ nous permet de determiner la position relative de C_f et l'asymptote oblique

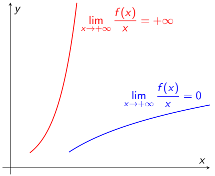
Exercice

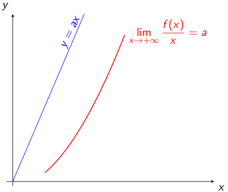
Soit $f(x) = \sqrt{4x^2 + x - 2}$ *determiner l'asymptote oblique de* C_f *au voisinage de* $\pm\infty$

4. Les directions asymptotiques

Définition

- *si* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ *alors* C_f *admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses*
- *si* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$ *alors* C_f *admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses*
- *si* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ *et* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ *alors* C_f *admet une branche parabolique vers la droite* $y = ax$





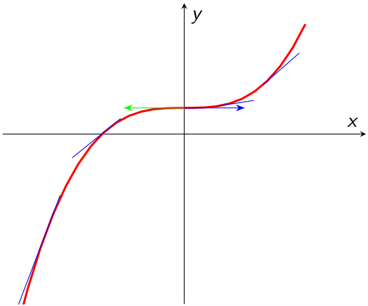
2 - Convexité et points d'inflexion

1. Notion de convexité, de concavité

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

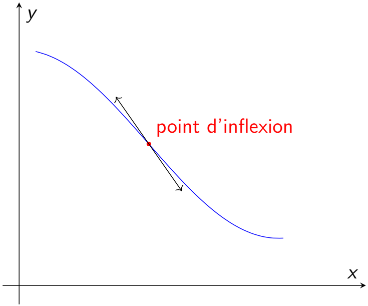
- *On dit que f est convexe sur I, si sur I la courbe C_f est entièrement au-dessus de toutes ses tangentes.*
- *On dit que f est concave sur I, si sur I la courbe C_f est entièrement au-dessous de toutes ses tangentes.*



2. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. et $x_0 \in I$
On dit que le point $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion si la courbe C_f change de convexité au point A



3. Convexité et fonction dérivée seconde

Propriétés (Convexité et fonction dérivée seconde)

- *C_f est convexe sur I si et seulement si $f'' > 0$ sur I*
- *C_f est concave sur I si et seulement si $f'' < 0$ sur I*
- *Si f'' **s'annule et change de signe** au point x_0 alors $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion***

Propriété

*si f' s'annule sans changer de signe au point x_0 alors $A(x_0, f(x_0))$ est un **point d'inflexion***

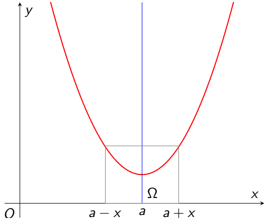
Exemple

Etudier la convexité puis determiner les points d'inflexion s'ils existes :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1 \quad ; \quad g(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

3 - Axe et centre de symetrie d'une représentation graphique de fonction

1. Axe de symetrie



si C_f admet la droite $x = a$ comme axe de symetrie, alors l'équation cartésienne de C_f dans le repère $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\Omega(a, 0)$ est $Y = f(a + X) = \Phi(X)$

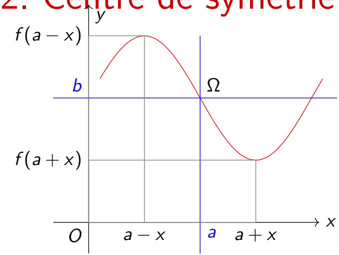
tel que Φ est paire et $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases}$

c-à-d $\forall X \in D_\Phi : \Phi(-X) = \Phi(X)$
donc $\forall X \in D_\Phi : f(a - X) = f(a + X)$
alors $\forall X \in D_f : f(2a - x) = f(x)$

Définition

dans un repère orthonormé, la droite $x = a$ est un axe de symetrie de C_f si et seulement si :
$\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f$ *et* $f(2a - x) = f(x)$

2. Centre de symetrie



Si C_f admet $\Omega(a, b)$ comme centre de symetrie, c-à-d l'équation cartésienne de C_f dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est sous la forme $Y + b = f(a + X)$
alors $Y = f(a + X) - b = \Phi(X)$ tel que Φ est une fonction impaire et $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$
c-à-d $\forall X \in D_\Phi : \Phi(-X) = -\Phi(X)$

Alors $\forall X \in D_\Phi : f(a - X) - b = -f(a + X) + b$
Alors $\forall X \in D_\Phi : f(a - X) - 2b = -f(a + X)$
et puisque $X = x - a$ alors $a - X = 2a - x$ et $a + X = x$
Donc $\forall x \in D_f : f(2a - x) = 2b - f(x)$

Définition

dans un repère , le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symetrie de C_f si et seulement si :
$\forall x \in D_f : 2a - x \in D_f$ *et* $f(2a - x) = 2b - f(x)$

4 - Exercices d'application

Exercice (1)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$. *Soit* C_f *sa représentation graphique dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1)- a- *determiner* D_f

b- *caluler* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c- *caluler* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ *puis interprêter*

2)- a- *Montrer que* $\forall x \in D_f \; : f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

b- *Etudier les variations de* f *et dresser le tableau des variations*

3)- *Donner l'équation de la tangente à* C_f *au point* $x_0 = 0$

4)- *Montrer que le point* $A(2,1)$ *est un centre de symetrie de* C_f

5)- *Montrer que la droite* $y = x - 1$ *est une asymptote oblique au voisinage de* $-\infty$ *et* $+\infty$

6)- *Construir* C_f