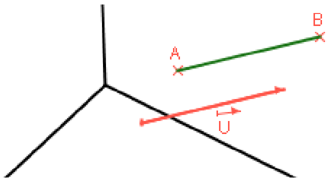
متجهات الفضاء

$I-$ تساوي متجهتين من الفضاء :

1) تحديد متجهة :

تعريف :



لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء، نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

✱ اتجاه المتجهة $\vec{u}$ هو اتجاه المستقيم (AB).

✱ منحى المتجهة $\vec{u}$ هو من A نحو B.

✱ منظم المتجهة $\vec{u}$ هو المسافة بين A و B.

حالة خاصة :

إذا كان $A=B$ فإن $\vec{u}=\overrightarrow{AA}$ و المتجهة $\vec{u}$ ليس لها اتجاه وليس لها منحى ، ومنظمها 0 .

نقول إن المتجهة $\vec{u}$ منعدمة ونرمز لها بالرمز $\vec{0}$ ونكتب : $\vec{u}=\vec{0}$.

استنتاج :

كل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء تحدد باتجاهها ومنحاها ومنظمها .

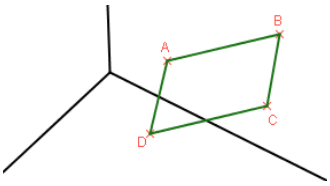
خاصية 1 :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء ،
تكون المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الاتجاه ونفس المنحى ونفس المنظم .

خاصية 2 :

لكل متجهة $\vec{u}$ و لكل نقطة A من الفضاء توجد نقطة وحيدة B من الفضاء بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

ملاحظة :

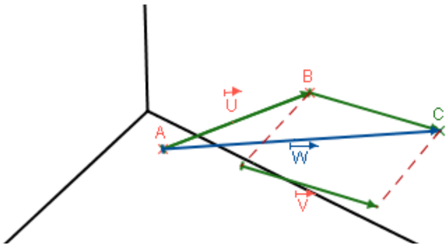


ليكن $ABCD$ رباعي في الفضاء .

- يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

- إذا كان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

$II-$ مجموع متجهتين في الفضاء :

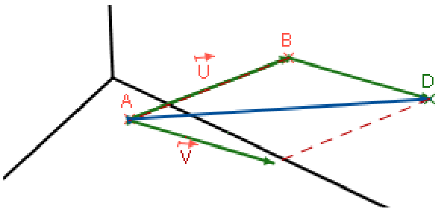


✱ لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء ، بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

توجد نقطة وحيدة C من الفضاء بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$

النقطتين A و C تحددان متجهة $\overrightarrow{AC}$ في الفضاء وتسمى مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، أي $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ حيث $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$

ونكتب أيضا $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ، و هذه العلاقة تسمى علاقة شال .



✱ لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من الفضاء ، بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

توجد نقطة وحيدة D من الفضاء بحيث : $\vec{v}=\overrightarrow{BD}$

ومنه $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

المتجهة $\overrightarrow{BD}$ تسمى مجموع المتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ، والنقطة D هي الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع $ABDC$

خاصيات :

مهما تكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء لدينا :

$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ ، $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ ، $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ ، $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

المتجهة $-\vec{u}$ تسمى مقابل المتجهة $\vec{u}$ ، ومقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو المتجهة $-\overrightarrow{AB}$ التي نرمز لها بالرمز $\overrightarrow{BA}$.

$III-$ جداء متجهة في عدد حقيقي :

لتكن $\vec{u}$ متجهة بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و α عددا حقيقيا ،

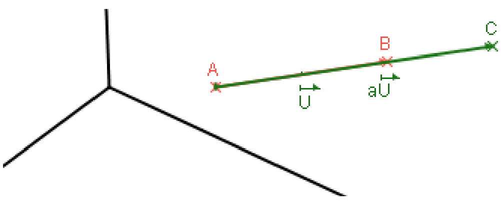
✱ إذا كان $\alpha>0$

توجد نقطة وحيدة C من الفضاء تحقق :

- $C\in(AB)$

- $AC=\alpha.AB$

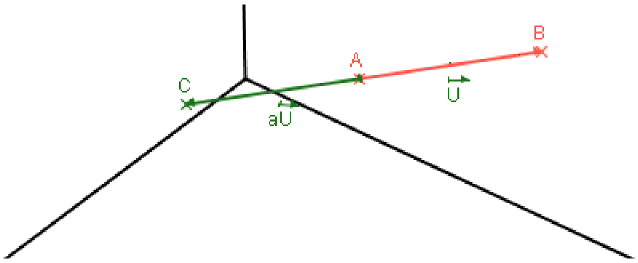
- المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما نفس المنحى .



* إذا كان $\alpha < 0$

توجد نقطة وحيدة C من الفضاء تحقق :

- $C \in (AB)$
- $AC = -\alpha AB$
- المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لهما منحيين متعاكسان .



في كلتا الحالتين ، هذه النقطة الوحيدة C تحقق : $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$

المتجهة $\overrightarrow{AC}$ تسمى جداء المتجهة $\vec{u}$ في α ، ونرمز لها بالرمز $\alpha\vec{u}$.

ملاحظة :

$$\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\alpha\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow |\alpha|.\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0 \; ou \; \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \; ou \; \vec{u} = \vec{0}$$

خاصيات :

مهما تكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء و α و β عددين حقيقيين لدينا :

$\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ ، $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

$\alpha(\vec{u}-\vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v}$ ، $(\alpha-\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$

$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

$IV-$ استقامية متجهتين :

1) تعريف :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء ، تكون المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي α بحيث $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ أو $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

ملاحظة :

- نرمز بـ V_3 لمجموعة متجهات الفضاء .
- المتجهة المنعدمة مستقيمية مع أية متجهة من الفضاء :

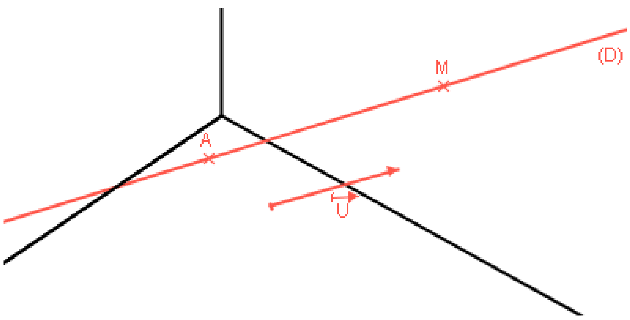
$$\forall \vec{u} \in V_3 : \; \vec{0} = 0\vec{u}$$

2) الكتابة المتجهية لمستقيم في الفضاء :

أ) تعريف :

ليكن (D) مستقيما مارا من النقطتين A و B ، المتجهة $\overrightarrow{AB}$ تسمى متجهة موجهة لـ (D) .

ب) الكتابة المتجهية لمستقيم في الفضاء :



ليكن (D) مستقيما مارا من النقطة A و موجه بالمتجهة $\vec{u}$.

لتكن M نقطة من الفضاء بحيث $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

إذن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان ،

وبما أن $A \in (D)$ فإن $M \in (D)$

عكسيا ، إذا كانت M نقطة من الفضاء بحيث $M \in (D)$

إذن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتين ،

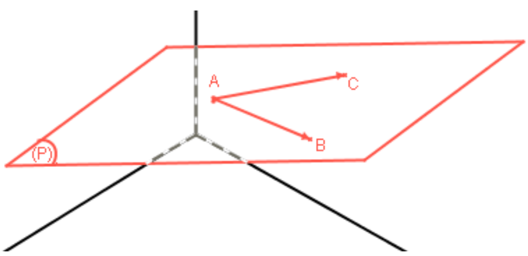
إذن يوجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$.

خاصية :

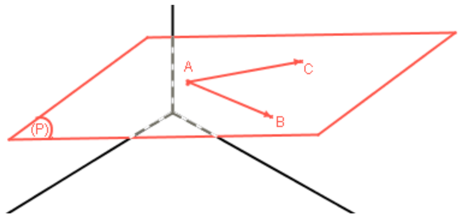
المستقيم (D) المار من النقطة A و الموجه بالمتجهة $\vec{u}$ في الفضاء هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ونرمز له بالرمز $D(A;\vec{u})$ ، أي : $(D) = D(A;\vec{u}) = \left\{ M \in \xi \,/\, \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \,;\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

3) الكتابة المتجهية لمستوى في الفضاء :

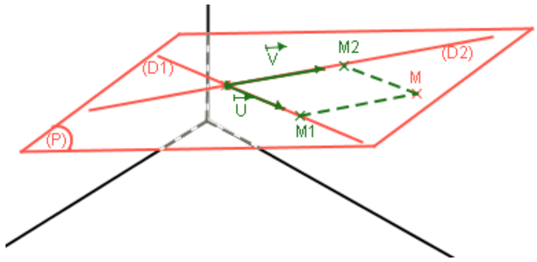
أ) تعريف :



ليكن (P) مستوى محدد بثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C ، المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين وتسميان بالمتجهتين الموجهتين لـ (P) .



ب) الكتابة المتجهية لمستقيم في الفضاء :



ليكن (P) مستوى مارا من النقطة A و موجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

لتكن M نقطة من المستوى (P)

نعتبر المستقيمين $(D_1)=D_1(A;\vec{u})$ و $(D_2)=D_2(A;\vec{v})$

و M_1 مسقط النقطة M على (D_1) بتواز مع (D_2)

و M_2 مسقط النقطة M على (D_2) بتواز مع (D_1)

لدينا $\overrightarrow{AM_1}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان إذن يوجد عدد حقيقي α بحيث $\overrightarrow{AM_1}=\alpha\vec{u}$

ولدينا $\overrightarrow{AM_2}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان إذن يوجد عدد حقيقي β بحيث $\overrightarrow{AM_2}=\beta\vec{v}$

وبما أن $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{AM_2}$ فإن $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$.

عكسيا : لتكن M نقطة من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ حيث $\alpha;\beta\in\mathbb{R}$.

لتكن M' و M'' نقطتين من المستوى تحققان على التوالي : $\overrightarrow{AM'}=\alpha\vec{u}$ و $\overrightarrow{AM''}=\beta\vec{v}$

إذن $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM'}+\overrightarrow{AM''}$

إذن $M\in(P)$

خاصية :

المستوى (P) المار من النقطة A و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ حيث $\alpha;\beta\in\mathbb{R}$ ونرمز له بالرمز : $P(A;\vec{u};\vec{v})$

أي : $(P)=P(A;\vec{u};\vec{v})=\left\{M\in\xi \,/\, \overrightarrow{AM}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\,;\alpha;\beta\in\mathbb{R}\right\}$

V- المتجهات المستوائية :

أ) تعريف :

لتكن A و B و C و D أربع نقط من الفضاء، نضع $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ و $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$

تكون المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مستوائية إذا وفقط إذا كانت النقط A و B و C و D مستوائية .

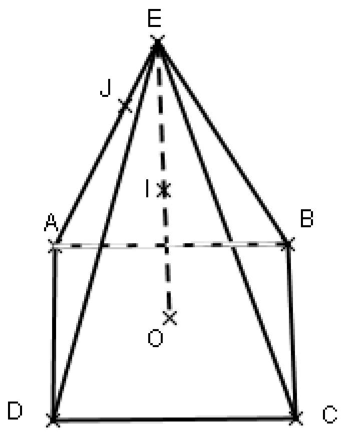
خاصية :

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء ،

تكون المتجهات $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية إذا وفقط إذا وجد عددين حقيقيين α و β بحيث :

$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ أو $\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$ أو $\vec{v}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{w}$

تمرين :



$SABCD$ هرم قاعدته المربع $ABCD$ و O مركز المربع $ABCD$

و I منتصف القطعة $[SO]$ ، و J نقطة من الفضاء بحيث : $\overrightarrow{SJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

1) بين أن النقط S و B و D و I و J مستوائية .

2) أكتب $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SD}$

3) أكتب $\overrightarrow{SO}$ بدلالة $\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SD}$

4) استنتج $\overrightarrow{BI}$ بدلالة $\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SD}$

5) بين أن النقط B و I و J مستقيمية .