المنطـق

I – العبارة – الدالة العبارية :

1- تعريف :

نسمي عبارة كل جملة مفيدة ، ويمكن الحكم على المعنى الذي تحمله بالصحة أو بالخطأ

نسمي دالة عبارية كل نص يحتوي على متغير x من مجموعة E ، ويصبح عبارة كلما عوضنا x بعنصر من E .

2- أمثلة :

أ) نعتبر النصوص التالية :

p_1 : 0 عدد زوجي $\square$ $\quad$ p_2 : $1<0$ $\square$ $\quad$ p_3 : $\sqrt{2}\in\square$ $\square$

p_1 و p_2 و p_3 كلها عبارات ، العبارة p_1 صحيحة والعبارتين p_2 و p_3 خاطئتين .

ب) نعتبر النصوص التالية :

$x\in\square$: $x^2>0$ ، $n\in\square$: ($2n+1$ عدد فردي) و $x\in\square^+$: $x^2\geq 2x-1$

هذه النصوص كلها دوال عبارية .

3- جدول حقيقة عبارة P :

الجدول

P
1
0

أو الجدول

P
V
F

يسمى جدول حقيقة P حيث يمثل قيمة حقيقة P :

قد تكون P صحيحة ، ونرمز لهذه الحالة بـ 1 أو V نسبة إلى *Vrai*

قد تكون P خاطئة ، ونرمز لهذه الحالة بـ 0 أو F نسبة إلى *Faux*;

II – المكممات :

1- المكمم الوجودي :

أ) نشاط :

هل يمكننا اعتبار العبارتين التاليتين صحيحتين ؟ (معللا جوابك)

- $\square$يوجد على الأقل عددا حقيقيا x بحيث $x^2-4x+3=0$ $\square$ - $\square$يوجد عددا حقيقيا وحيدا x بحيث $x^2-4x+3=0$ $\square$

ب) تعريف :

لتكن $p(x)$: $x\in E$ دالة عبارية .

العبارة $\exists x\in E : p(x)$ تعني يوجد على الأقل عنصرا x من E يحقق $p(x)$ ، وتقرأ "يوجد على الأقل x من E بحيث $p(x)$ "

العبارة $\exists! x\in E : p(x)$ تعني يوجد عنصر وحيد x من E يحقق $p(x)$ ، وتقرأ "يوجد عنصر وحيد x من E بحيث $p(x)$ "

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي . والرمز $\exists!$ يسمى المكمم الوجودي للوحدانية .

ج) أمثلة :

$\exists x\in\square : x^2-3x+2=0$ و $\exists! x\in\square : 2x+1=7$ عبارتان صحيحتان .

$\exists n\in\square : n+1=0$ و $\exists! x\in\square : x^2-3x+2=0$ عبارتان خاطئتان .

2- المكمم الكوني :

أ) نشاط :

هل يمكننا اعتبار العبارتين التاليتين صحيحتين ؟ (معللا جوابك)

- $\square$لكل عدد x من $\square$ لدينا $x^2\geq 0$ $\square$ - $\square$ لكل عدد x من $\square$ لدينا $x^2\geq x$ $\square$

ب) تعريف :

لتكن $p(x)$: $x\in E$ دالة عبارية .

العبارة $\forall x\in E : p(x)$ تعني أن جميع عناصر E تحقق $p(x)$ ، وتقرأ "مهما كان x من E لدينا $p(x)$ "

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني .

ج) أمثلة :

$\forall x\in\square : x^2\geq 0$ عبارة صحيحة .

$\forall x\in\square : x^2>0$ عبارة خاطئة .

3- العبارات المكممة :

أ) تعريف :

نسمي عبارة مكممة كل عبارة مكونة من دالة عبارية ومكمم أو عدة مكممات منطقية .

ب) أمثلة :

العبارات التالية عبارات مكممة :

$\forall x\in\square : x^2\geq 0$ عبارة صحيحة .

$(\forall x\in\square)(\forall y\in\square) : x^2-2xy+y^2\geq 0$ عبارة صحيحة .

$(\exists x\in\square)(\forall y\in\square) : y<x$ عبارة خاطئة.

$(\forall x\in\square)(\exists y\in\square) : y<x$ عبارة صحيحة .

$(\exists x\in\square)(\exists y\in\square) : x^2+(y-1)^2=0$ عبارة صحيحة .

ج) ملاحظة هامة :

- ترتيب مكممات من نفس النوع ليس له أي تأثير على قيمة حقيقة عبارة .
- ترتيب مكممات مختلفة له تأثير على قيمة حقيقة عبارة .

III- العمليات المنطقية :

1- النفي المنطقي :

أ) نشاط :

حدد قيمة حقيقة العبارات p و q و p' و q' حيث :

p : 12 عدد فردي ، q : $\pi \neq 3,14$ ، p' : 12 عدد زوجي ، q' : $\pi = 3,14$

ماذا تلاحظ حول العلاقة بين p و p' ثم بين q و q' ؟

ب) تعريف :

لتكن P عبارة ، نفي العبارة P هي عبارة تكون صحيحة إذا كانت P خاطئة ، وتكون خاطئة إذا كانت P صحيحة ، ونرمز لها بالرمز $\neg P$ أو $\overline{P}$ وتُقرأ : "نفي P"

ج) جدول حقيقة نفي عبارة :

P	$\neg P$
1	**0**
0	**1**

أمثلة :

نفي العبارة $2<1$ هو العبارة $2 \geq 1$ - نفي العبارة $x \leq 3$ هو العبارة $x > 3$

نفي العبارة $x \in \mathbb{Q}$ هو العبارة $x \notin \mathbb{Q}$ - نفي العبارة $n = 0$ هو العبارة $n \neq 0$

د) نفي عبارة مكممة :

لتكن $P(x)$: $x \in E$ و $P(x;y)$: $(x;y) \in E \times F$ دالتين عباريتين .

نفي العبارة $P(x)$: $\forall x \in E$ هو العبارة $\overline{P(x)}$: $\exists x \in E$

نفي العبارة $P(x)$: $\exists x \in E$ هو العبارة $\overline{P(x)}$: $\forall x \in E$

نفي العبارة $P(x;y)$: $(\forall x \in E)(\exists y \in F)$ هو العبارة $\overline{P(x;y)}$: $(\exists x \in E)(\forall y \in F)$

نفي العبارة $P(x;y)$: $(\forall x \in E)(\forall y \in F)$ هو العبارة $\overline{P(x;y)}$: $(\exists x \in E)(\exists y \in F)$

2- العطف المنطقي :

أ) نشاط :

حدد قيمة حقيقة العبارات التالية :

p : 35 عدد فردي وَ يقبل القسمة على 3 ، q : 91 عدد أولي وَ زوجي ، r : 0 عدد موجب وَ سالب

ب) تعريف :

عطف عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتين P و Q صحيحتين معا ، ونرمز لها بالرمز (P وَ Q) أو بالرمز $(P \wedge Q)$.

ج) جدول حقيقة عطف عبارتين:

(أنظر الجدول جانبه)

P	Q	$(P \wedge Q)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

أمثلة :

العبارة ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ وَ $\pi \notin \mathbb{Q}$) صحيحة .

العبارة ($\sqrt{2} = 1,41$ وَ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) خاطئة .

3- الفصل المنطقي :

أ) نشاط :

حدد قيمة حقيقة العبارات التالية :

p : 6 عدد فردي أو 7 عدد فردي ، q : 21 عدد أولي أو 21 عدد زوجي ، r : 8 عدد موجب أو 8 عدد زوجي

ب) تعريف :

فصل عبارتين P و Q هو عبارة تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتين P و Q خاطئتين معا ، ونرمز لها بالرمز (P أو Q) أو بالرمز $(P \vee Q)$.

ج) جدول حقيقة فصل عبارتين:

(أنظر الجدول جانبه)

P	Q	$(P \vee Q)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

أمثلة :

العبارة ($\sqrt{x^2} = |x|$) $\vee$ ($-2 \in \mathbb{Q}$) صحيحة.

العبارة ($\pi = 3,14$ $\vee$ $\pi = \frac{22}{7}$) خاطئة.

4- الاستلزام المنطقي :

أ) نشاط :

لتكن P و Q عبارتين ، ضع جدول حقيقة العبارة $(\neg P \vee Q)$.

ب) تعريف :

لتكن P و Q عبارتين ، العبارة $(\neg P \vee Q)$ تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارة P صحيحة و Q خاطئة ، وتسمى استلزام العبارتين P و Q (في هذا الترتيب) ، ونرمز لها بالرمز $(P \Rightarrow Q)$.

ج) جدول حقيقة استلزام عبارتين:

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

ملاحظات هامة :

* لتكن P و Q عبارتين ، عندما يكون الاستلزام : $P \Rightarrow Q$ صحيح فإننا نقول كذلك :

- P تستلزم Q .
- P شرط كافي لتحقيق Q (وقد لا يكون لازما)
- Q شرط لازم لتحقيق P (وقد لا يكون كافيا)

* هناك عدة عبارات تدل على أن $P \Rightarrow Q$ منها :

إذا كان P فإن Q ، P إذن Q ، P ومنه Q ، P وبالتالي Q ...

* عمليا :

- لكي نبين أن $P \Rightarrow Q$ ، نفترض أن P صحيحة ثم نبين أن Q صحيحة .
- ولكي نبين أن $P \not\Rightarrow Q$ ، نبحث عن مثال مضاد يحقق P ولا يحقق Q .

أمثلة :

العبارة $(n+1$ عدد فردي $) \Rightarrow (n$ عدد زوجي $)$: $\forall n \in \mathbb{N}$ صحيحة .

العبارة $(x > 0 \Rightarrow x \geq 0)$: $\forall x \in \mathbb{R}$ صحيحة.

العبارة $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$: $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ خاطئة .

تمرين تطبيقي :

حدد في كل حالة من الحالات التالية ما إذا كان $(P \Rightarrow Q)$ أو $(Q \Rightarrow P)$:

1) لكل x و y من $\mathbb{R}$ ، $P : x \cdot y = 1$ و $Q : (x = 1) \wedge (y = 1)$

2) لكل x من $\mathbb{R}$ ، $P : x \leq 3$ و $Q : x^2 \leq 9$

3) لكل x و y من $\mathbb{R}$ ، $P : xy = 0$ و $Q : x = 0$

5- التكافؤ المنطقي :

أ) تعريف :

تكافؤ عبارتين P و Q هو عبارة تكون صحيحة فقط إذا كانت للعبارتين P و Q نفس قيمة الحقيقة ، ونرمز لها بالرمز $P \Leftrightarrow Q$.

ب) جدول حقيقة تكافؤ عبارتين :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**1**

ملاحظة :

* لتكن P و Q عبارتين ، عندما يكون التكافؤ: $P \Leftrightarrow Q$ صحيح فإننا نقول كذلك :

- P تكافئ Q .
- P شرط كافي ولازم لتحقيق Q .

* هناك عدة عبارات تدل على أن $P \Leftrightarrow Q$ منها :

P يعني Q ، P تكافئ Q ، P أي Q ، P إذا وفقط إذا كان Q ...

* عمليا ، لكي نبين أن $P \Leftrightarrow Q$ ، يكفي أن نبين أن الإستلزامين $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ صحيحين معا .

مثال :

العبارة $\left((x-1)(x+3) = 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0\right)$: $\forall x \in \mathbb{R}$ صحيحة لأن :

$\left((x-1)(x+3)=5 \Rightarrow x^2+2x-8=0\right)$ و $\left(x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x-1)(x+3)=5\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

تمرين تطبيقي :

1) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}: \left(x^2 < x \Leftrightarrow x \in]0;1[\right)$

2) ليكن $a \in \mathbb{R}^*$ ، هل العبارتين $a=5$ و $a=\frac{25}{a}$ متكافئتين ؟

3) هل البرهانين التاليين صحيحين أم خاطئين (معللا جوابك) :

$\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4$

أ) لكل عدد حقيقي x لدينا : $\Leftrightarrow x^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

$a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 4a \Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2} \geq 4$

ب) لكل x و a من $\mathbb{R}^*$ لدينا : $\Leftrightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2} \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 \geq 0$

IV– القوانين المنطقية :

1- تعريف :

نسمي قانونا منطقيا كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة بالروابط المنطقية وتكون صحيحة مهما كانت قيمة حقيقة هذه العبارات.

مثال :

العبارة $P \vee \overline{P}$ قانون منطقي لأنها صحيحة مهما كانت قيمة حقيقة P ، ويظهر ذلك من خلال جدول حقيقة $P \vee \overline{P}$:

P	$\overline{P}$	$P \vee \overline{P}$
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**

2- جرد لأهم القوانين المنطقية :

أ) قانون التكافؤات المتتالية :

خاصية :

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، العبارة : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ قانون منطقي .

أي لكي نبين أن P تكافئ R يكفي أن نبين أن P تكافئ Q وأن Q تكافئ R

بصفة عامة إذا كانت P و R و Q_1 و Q_2 و .... و Q_n عبارات حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

العبارة : $[(P \Leftrightarrow Q_1) \wedge (Q_1 \Leftrightarrow Q_2) \wedge ... \wedge (Q_n \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ قانون منطقي .

ب) قانون الاستلزام المضاد للعكس :

خاصية :

لتكن P و Q عبارتين ، العبارة : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$ قانون منطقي .

تمرين :

برهن على هذه الخاصية باستعمال جدول الحقيقة .

ج) قانوني موركان :

خاصية :

لتكن P و Q عبارتين ، العبارات التالية قوانين منطقية : $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$ و $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$

تطبيق :

1) حدد نفي العبارتين التاليتين :

P_1 : $(a \neq 0$ وَ $b \neq 0)$ (حيث a و b من $\mathbb{R}$)

P_2 : $(x > 2 \Rightarrow x > 0)$ (حيث x من $\mathbb{R}$)

2) حدد الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام التالي : $(a \cdot b = 0 \Rightarrow (a=0 \vee b=0))$ (حيث a و b من $\mathbb{R}$)

3) نفي استلزام : نفي $P \Rightarrow Q$ هو نفي $(\neg P \vee Q)$ وهو : $(P \wedge \neg Q)$.

د) قانون الخلف :

خاصية :

لتكن P و Q عبارتين ، العبارة : $[(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}) \wedge Q] \Rightarrow P$ قانون منطقي .

لكي نبين بالخلف أن P صحيحة ، نفترض أن P خاطئة ، أي نفترض أن $\overline{P}$ صحيحة ونبين أن الاستلزام $(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ صحيح (حيث Q عبارة صحيحة) إذن بما أن $\overline{P}$ صحيحة و الاستلزام $(\overline{P} \Rightarrow \overline{Q})$ صحيح فإن $\overline{Q}$ صحيحة ، وهذا تناقض مع Q صحيحة . وبالتالي افتراضنا خاطئ ، إذن P صحيحة .

هـ) قانون فصل الحالات :

خاصية :

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، العبارة : $[(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [(P \vee Q) \Rightarrow R]$ قانون منطقي .

أي لكي نبين أن $(P \vee Q)$ تستلزم R يكفي أن نبين أن P تستلزم R وأن Q تستلزم R .

أو بصيغة أخرى إذا كانت E و E_1 و E_2 ثلاث مجموعات بحيث $E = E_1 \cup E_2$ و $p(x) : x \in E$ دالة عبارية.

لكي نبين أن : $\forall x \in E : p(x)$ صحيحة يكفي أن نبين أن : $\forall x \in E_1 : p(x)$ و $\forall x \in E_2 : p(x)$ صحيحتين معا.

و) قوانين منطقية أخرى :

لتكن P و Q و R ثلاث عبارات ، العبارات التالية قوانين منطقية :

$$\overline{(\overline{P})} \Leftrightarrow P$$

$$(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$$

$$(P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow P)$$

$$[P \wedge (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R)]$$

$$[P \vee (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R)]$$

$$[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$$

$$[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$$

V- بعض الاستدلالات الرياضية :

1- الاستدلال بالتكافؤات المتتالية :

لكي نبين أن العبارة P صحيحة يكفي أن نبين أن (P تكافئ Q) وأن Q صحيحة .

تمرين تطبيقي 1 :

بين أن : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 \geq 4xy$ وأن : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2+xy}$

2- الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس :

لكي نبين أن $P \Rightarrow Q$ يكفي أن نبين أن $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

تمرين تطبيقي 2 :

ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، بين أن : $x \neq 8 \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-3} \neq 2$

3- الاستدلال بالخلف :

لكي نبين أن P صحيحة ، نفترض العكس، أي أن $\overline{P}$ صحيحة ثم نبين أن $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ حيث Q عبارة صحيحة ، إذن Q و $\overline{Q}$ صحيحتين، وهذا مستحيل ، فنستنتج أن افتراضنا خاطئ ، ومنه P صحيحة.

تمرين تطبيقي 3 :

1) بين بالخلف أن : $\forall x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \neq 1$

2) ليكن (D) و (D') مستقيمين متوازيين ، و (Δ) مستقيم يقطع (D) ، بين بالخلف أن (Δ) يقطع (D') .

4- الاستدلال بفصل الحالات :

ليكن $E = E_1 \cup E_2$ ، لكي نبين أن : $\forall x \in E : p(x)$ صحيحة يكفي أن نبين أن العبارتين $\forall x \in E_1 : p(x)$ و $\forall x \in E_2 : p(x)$ صحيحتين .

تمرين تطبيقي 4 :

1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: n^2+n عدد زوجي .

2) ليكن x عدد حقيقي ، بين بفصل الحالات أن : $|x-1|+1-x \geq 0$: $(\forall x \in \mathbb{R})$.

5- الاستدلال بمثال مضاد :

لكي نبين أن العبارة $\forall x \in E : p(x)$ خاطئة ، يكفي أن نبين أن العبارة $\exists x \in E : \overline{p(x)}$ صحيحة .

تمرين تطبيقي 5 :

بين أن العبارة : $\forall x \in \mathbb{R} : x^3 \geq x^2$ خاطئة .

6- الاستدلال الإستنتاجي :

لكي نبين أن العبارة Q صحيحة ، يكفي أن نجد عبارة صحيحة P تحقق $P \Rightarrow Q$.

تمرين تطبيقي 6 :

ليكن x و y عددين من $\mathbb{R}$ بحيث : $x^2+y^2=1$ ،

1) بين أن $|x+y| \leq \sqrt{2}$ و أن $|x-y| \leq \sqrt{2}$.

2) استنتج أنه لكل α من $\mathbb{R}$ لدينا : $|\sin\alpha+\cos\alpha|\le\sqrt{2}$ و $|\sin\alpha-\cos\alpha|\le\sqrt{2}$

7- الاستدلال بالترجع :

خاصية :

لتكن $p(n)$: $n\in\mathbb{N}$ دالة عبارية و $n_0\in\mathbb{N}$.

إذا كانت العبارة $p(n_0)$ صحيحة وكان الاستلزام $p(n)\Rightarrow p(n+1)$ صحيحا حيث $n\ge n_0$ ، فإن :

العبارة $\forall n\ge n_0 : p(n)$ صحيحة .

تمرين تطبيقي 7 :

1) ليكن $a\in\mathbb{R}_+^*$ ،

بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}$: $1+na\le(1+a)^n$

2) نضع $S_n=1+3+5+...+(2n+1)$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}$: $S_n=(n+1)^2$