Série : Notions de logique

Exercice 1

Écrire à l'aide de quantificateurs ces propositions :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
4. Il y a un entier plus grand que tous les entiers.

Exercice 2

Traduisez ces propositions en langage courant:

1. $P : (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) : x > y$
2. $P : (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) : x > y$
3. $P : (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$
4. $P : (\exists x \in \mathbb{R}); x^2 = 4$

Exercice 3

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

1. $P : (\forall x \in \mathbb{R})/x^2 > 0$
2. $Q : (\exists x \in \mathbb{R})/x^2 - 9 = 0$
3. $R : (\forall n \in \mathbb{N})/\dfrac{n}{2} \in \mathbb{N}$
4. $S : (\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}) : n \prec m$
5. $T : (\exists x \in \mathbb{Z}); \dfrac{x}{4} \in \mathbb{Z}$

Exercice 4

Déterminer la valeur de vérité de chaque proposition suivante :

1. $x \in \mathbb{R}; \big(x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2\big)$.
2. $(7 < 5$ et $2 + 1 = 3)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$
3. $(7 < 5 \Rightarrow 2 + 1 = 0)$ ou $(-3 \in \mathbb{N})$

■ Raisonnement par contre-exemple

Exercice 5

Montrer que ces propositions sont fausses :

1. "Tous les nombres entiers naturels sont pairs"
2. $\forall n \in \mathbb{N}; (n+1)^2 = n^2 + 1$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 + n + 1$ est un nombre premier.

■ Raisonnement par équivalence

Exercice 6

1. Montrer que : $8 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$
2. Résoudre l'équation : $x^3 - x^2 = 0$
3. Montrer que $\forall x \geq \frac{1}{2} : x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x = 1$

■ Raisonnement par contraposée

Exercice 7

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq -5$.
   Montrer que : $x \neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5} \neq 2$
2. Soient $x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$
3. En utilisant le raisonnement par contraposée montrer que : si $x \in]1; +\infty[$ et $y \in]1; +\infty[$
   $$x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y$$

■ Raisonnement par Absurde

Exercice 8

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ Posons $\mathrm{A} = \frac{n+3}{n+5}$, Montrer que $\mathrm{A} \neq 1$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*; \quad \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$
3. Soient x, y et z des nombres réels. Montrer que le système $\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$ n'admet pas de solution.

■ Raisonnement par disjonction des cas

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}; n(n+1)$ est pair (distinguer les n pairs des n impairs).
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x - 5| = 2$
3. Soit m un réel, discuter selon les valeur du paramètre m, le nombres de solutions de l'équation $x^2 = m$

■ Raisonnement par récurrence

Exercice 10 : Montrer que

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}; 7^n - 1$ est divisible par 6
3. $\forall n \in \mathbb{N}; n^3 + 2n$ est divisible par 3.
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2$
5. $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$