

Exercice 1 (Dédution)

1. Soit
- $x, y \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$\begin{cases} x > 2 \\ y > 2 \end{cases} \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{2}.$$

2. Soit
- $x \in \mathbb{R}^+$
- . Montrer que :

$$\frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \implies x = 1.$$

3. Soit
- $a, b \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$\begin{cases} a > 1 \\ b > 1 \end{cases} \implies \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 + \frac{1}{ab}.$$

4. Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$x > 3 \implies \frac{x+1}{x-1} > 2.$$

5. Soit
- $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$
- . Montrer que :

$$\begin{cases} x > y \\ xy > 1 \end{cases} \implies \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < x + y.$$

6. Soit
- $a \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$a > 2 \implies a^2 - 3a + 2 > 0.$$

Exercice 2 (Contraposée)

1. Montrer que :

$$x \neq 3 \text{ et } y \neq 3 \implies 3x + 3y - xy \neq 6.$$

2. Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- . Montrer que si
- n^2
- est divisible par 3, alors
- n
- est divisible par 3.

3. Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- . Montrer que si
- n^2
- est pair, alors
- n
- est pair.

4. Montrer que :

$$x \neq 2 \text{ et } y \neq 2 \implies xy - 2x - 2y \neq -4.$$

5. Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- . Montrer que

si n n'est pas divisible par 5, alors n^2 n'est pas divisible par 5.

Exercice 3 (Équivalences)

1. Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$|x - 3| \leq 2 \iff 1 \leq x \leq 5.$$

2. Soit
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- . Montrer que :

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$$

3. Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$|x + 2| < 3 \iff -5 < x < 1.$$

4. Soit
- $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- . Montrer que :

$$\frac{x+1}{x-2} \leq 0 \iff x \in]-1, 2[.$$

5. Soit
- $x \in \mathbb{R}$
- . Montrer que :

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \iff 2 \leq x \leq 3.$$

6. Soit
- $x \in \mathbb{R}^{+*}$
- . Montrer que :

$$\sqrt{x} \geq 2 \iff x \geq 4.$$

Exercice 4 (Disjonction des cas)

1. Résoudre dans
- $\mathbb{R}$
- l'inéquation :
- $|x-2| + 3x - 5 \geq 0$
- .

2. Montrer que
- $\forall x \in \mathbb{R} : |x-2| \leq x^2 - x + 2$
- .

3. Résoudre dans
- $\mathbb{R}$
- l'inéquation :
- $|x+1| - 2x \geq 3$
- .

4. Montrer que
- $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq x^2 + 1$
- .

5. Résoudre dans
- $\mathbb{R}$
- l'équation :
- $|2x-1| = |x+3|$
- .

6. Montrer que
- $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| + |x+1| \geq 2$
- .

Exercice 5 (Absurde)

1. Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- . Montrer que
- $\sqrt{n^2 + 3}$
- n'est pas un entier.

2. Montrer que
- $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+2}{n+3} \notin \mathbb{N}$
- .

3. Montrer que
- $\sqrt{2}$
- est irrationnel.

4. Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- . Montrer que
- $\sqrt{n^2 + n + 1}$
- n'est pas un entier.

5. Montrer que
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{n+1} \notin \mathbb{N}$
- .

6. Montrer qu'il n'existe aucun entier
- $n \geq 2$
- tel que
- $n^2 - 2$
- soit un carré parfait.

Exercice 6 (Récurrence)

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1 \text{ est divisible par 3.}$$

3. Soit
- $a > 0$
- . Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1 + na.$$

4. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^n - 1 \text{ est divisible par 2.}$$

6. Soit
- $a > 1$
- . Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : a^n \geq 1 + n(a-1).$$