

Exercice 1 : (7 pts)

① On considère la proposition suivante, $P : (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 5x + 4 \neq 0$.

- (a) Déterminer la négation de la proposition P .
- (b) En déduire, la valeur de vérité de la proposition P .

②

- (a) Montrer l'équivalence suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y + 2 \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \iff \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y} - 1)^2 \geq 0.$$

- (b) En déduire, la valeur de vérité de la proposition : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y + 2 \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$.

③

- (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 1 \neq 2x - 1$.

- (b) Soit ABC un triangle tel que $AB = a$, $AC = 1$ et $BC = \sqrt{2a - 1}$ avec $a \in]\frac{1}{2}, +\infty[$.

Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A .

④ Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

Montrer l'implication suivante : $x \neq -\frac{1}{2}y \Rightarrow x - y \neq -3(x + y)$.

⑤ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 + 2|x - 1| - 1 = 0$.

⑥

- (a) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

- (b) En déduire : $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{10} = \dots\dots\dots$

⑦ Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 8^n - 3^n$ est un multiple de 5.

Exercice 2 : (4,5 pts)

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- 1 Montrer que $D_f = \mathbb{R}$.
- 2 Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que $-1 \leq f(x) \leq 1$.
- 3 Étudier la parité de la fonction f .
- 4 Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R} : f(x) - f(y) = \frac{2(1-xy)(x-y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$, puis en déduire T_f .
- 5 Déduire le sens des variations de f sur $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$.
- 6 En déduire le sens des variations de f sur $[-1; 0]$ puis sur $] -\infty; -1]$.
- 7 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 8 Déterminer les extrémums de f sur $\mathbb{R}$ s'ils existent.

Exercice 3 : (8,5 pts)

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x+2}.$$

- 1 Déterminer D_f et D_g , les ensembles de définition de f et g .
- 2 Étudier les variations de f et g .
- 3 Donner les tables de variations des fonctions f et g .
- 4 (a) Vérifier que $f(2) = g(2)$ puis interpréter graphiquement ce résultat.

-
- (b) Tracer (C_f) et (C_g) , leurs courbes respectives de f et g dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (c) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.
- (d) Déterminer graphiquement $g([2; +\infty[)$ et $f(]-\infty; 2])$.
- 5 Déterminer $D_{f \circ g}$, l'ensembles de définition de $f \circ g$.
- 6 Montrer que : $(\forall x \in D_{f \circ g}) : (f \circ g)(x) = \frac{1}{4}(x+2)\sqrt{x+2}$.
- 7 Dresser le tableau de variations de la fonction $f \circ g$.