Devoir surveillé n° 1

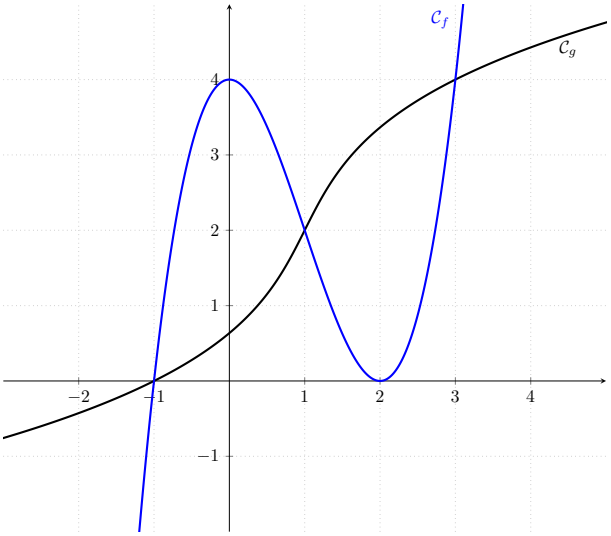
Semestre 1 (Durée : 2h)

Exercice 1 : [8 points]

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 9 - x^2$
   Soit la proposition suivante : $\mathcal{R}$: « $\left(\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\right)\ :\ f(a) = f(b) \implies a = b$ »
   (a) Montrer que la fonction f est paire. **(0,5 pt)**
   (b) Donner la négation de la proposition $\mathcal{R}$, puis en déduire que $\mathcal{R}$ est fausse. **(1 pt)**
2. Montrer par contraposée que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ x \neq -1 \implies \sqrt{x^2+3} + x \neq 1$. **(1 pt)**
3. Montrer par l'absurde que : $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})\ \dfrac{2x+1}{x-1} \neq 2$ **(1 pt)**
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x-1| + |x+3| = 6$ **(1,5 pt)**
5. Montrer que : $\left(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\right),\quad x^2 + y^2 + 5 = 4x - 2y \iff x = 2$ et $y = -1$. **(1,5 pt)**
6. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \cdots + n \times 2^{n-1} = (n-1) \times 2^n + 1$ **(1,5 pt)**

Exercice 2 : [3,5 points]

La courbe $\mathcal{C}_f$ (en bleu) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, et la courbe $\mathcal{C}_g$ (en noir) est celle d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
En utilisant les courbes ci-contre :



1. Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(0,75 pt)**
2. Déterminer $g\left([-1;3]\right)$ et $f\left([-1;1]\right)$. **(0,75 pt)**
3. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. **(0,5 pt)**
4. Résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$. **(0,5 pt)**
5. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 4$. **(0,5 pt)**
6. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

Exercice 3 : [2,5 points]

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{4x+2}{x^2+2}$

1. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) \leq 2$. **(0,75 pt)**
   (b) Calculer $f(1)$, puis en déduire que 2 est la valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**
2. (a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = -1 + \dfrac{(x+2)^2}{x^2+2}$. **(0,5 pt)**
   (b) Le réel -1 est-il la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse. **(0,75 pt)**

Exercice 4 : [6 points]

I. Soient u et v les fonctions numériques définies sur $[-3\,;+\infty[$ et $\mathbb{R}$ respectivement par $u(x) = \sqrt{x+3}$ et $v(x) = 1 - x^2$

1. Dresser les tableaux de variations de u et de v. **(1 pt)**
2. Construire les courbes $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ dans un même repère orthonormé. **(2 pt)**
3. Déterminer l'ensemble de définition $D_{u\circ v}$ de la fonction $u \circ v$, puis calculer $(u \circ v)(x)$ pour tout $x \in D_{u\circ v}$. **(1 pt)**
4. Étudier le sens de variation de la fonction $u \circ v$ sur l'intervalle $[-2;-1]$. **(1 pt)**

II. Montrer que la fonction définie par $x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{3}x\right)$ est périodique de période $T = 6$. **(1 pt)**