Exercice 1 Questions indépendantes (7,5 pts)

1. Étudier la valeur de vérité des propositions suivantes puis donner leurs négations :

P : "$(\forall x \in \mathbb{R}); x > 0$" $\qquad$ Q : "$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{9} = -3$"

R : "$(\exists n \in \mathbb{N}) : \dfrac{5}{n+3} \in \mathbb{N}$"

S : "$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}); (n = 2k$ ou $n = 2k+1)$"

0,5 **2.** On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x + 1$

0,5 **a)** Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

1 **b)** En déduire que la fonction f n'est ni paire ni impaire.

1 **3.** Montrer que pour tout x et y de $\mathbb{R}$:

$(x \neq y$ et $x + y \neq 3) \Rightarrow (x^2 - 3x + 5 \neq y^2 - 3y + 5)$

0,5 **4.** Soit x et y deux nombres réels.

0,5 **a)** Démontrer que : $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

1 **b)** En déduire que : $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow |x+y| \leq \sqrt{2}$

1 **5.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E) : |-3x+4| + |x-5| = 10$

1 **6. a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

0,5 **b)** En déduire la valeur de la somme : $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

Exercice 2 (4,75 pts)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{x^2+1}$

0,75 **1.** Déterminer D_f l'ensemble de définition de f, puis montrer que f est paire.

1 **2. a)** Montrer que f est majorée par le nombre 5 sur D_f.

1 **b)** Est-ce que 5 est une valeur maximale de f sur D_f ?

1 **3. a)** Montrer que f est minorée par le nombre 1 sur D_f.

1 **b)** Est-ce que 1 est une valeur minimale de f sur D_f ?

Exercice 3 (5,75 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1 **1.** Montrer que la fonction f est impaire.

1 **2.** Soit a et b deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$. Montrer que : $T(a;b) = \dfrac{ab-1}{ab}$

1 **3.** Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0,5 **4.** En déduire les variations de f dans chacun des intervalles suivants :

$[-1;0[$ et $]-\infty;-1]$.

0,5 **5.** Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

6. Soit a un réel tel que $a > 1$.

0,75 **a)** Montrer que pour tout $a > 1$: $a > \sqrt{a}$

1 **b)** En déduire la comparaison des deux nombres : $\dfrac{a^2+1}{a}$ et $\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$