

Exercice 1 (3 points)

On considère la proposition : $(P) : \ll \text{il existe deux réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } 2a^2 + 2b^2 < (a + b)^2 \gg$

1. Écrire (P) à l'aide des quantificateurs.
2. Donner la négation de (P) .
3. Dédire la valeur de vérité de (P) .

Exercice 2 (4 points)

Les questions de cet exercice sont indépendantes entre elles.

1. Montrer par contraposée que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 : (x \neq y \text{ et } xy \neq 2) \Rightarrow \frac{x^2 + 2}{x} \neq \frac{y^2 + 2}{y}$
2. Montrer par disjonction des cas que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{2x^2 - 3x + 3} - x + 2025 > 0$
3. Montrer par absurde que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{x} \neq \frac{x + 2}{\sqrt{x + 2}}$
4. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$

Exercice 3 (9 points)

Soient f et g deux fonctions définies par : $g(x) = -\frac{1}{8}x^3$ et $f(x) = \sqrt{x + 3}$

(C_f) et (C_g) les courbes de f et g respectivement dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g et dresser son tableau de variations.
2. Déterminer l'ensemble de définition de f et dresser son tableau de variations.
3. Calculer $g(-2)$ et $f(-2)$.
4. Construire (C_f) et (C_g) .
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, en déduire que : $\forall x \in [-2, +\infty[: x^3 + 8\sqrt{x + 3} \geq 0$
6. Déterminer $f([-3; +\infty[)$ et $g([-2; +\infty[)$.
7. Déterminer $D_{g \circ f}$.
8. Déterminer $g \circ f(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$.
9. Dresser le tableau de variation de $g \circ f$.

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x - x^3$

1. Montrer que f est une fonction impaire.
2. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) - 2 = -(x - 1)^2(x + 2)$
3. En déduire que $f(1)$ est la valeur maximale de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire la valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}^-$.

﴿وَقَالُوا اتَّخَذَ الرَّحْمَنُ وَلَدًا﴾ (88). ﴿لَقَدْ جِئْتُمْ شَيْئًا إِدًّا﴾ (89). ﴿تَكَادُ السَّمَوَاتُ يَتَفَطَّرْنَ مِنْهُ وَتَنْشَقُّ الْأَرْضُ وَتَخِرُّ الْجِبَالُ هَدًّا﴾ (90).
﴿أَنْ دَعَوْا لِلرَّحْمَنِ وَلَدًا﴾ (91). ﴿وَمَا يَنْبَغِي لِلرَّحْمَنِ أَنْ يَتَّخِذَ وَلَدًا﴾ (92). ﴿إِنْ كُلُّ مَنْ فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ إِلَّا آتَى الرَّحْمَنِ عَبْدًا﴾
(93). ﴿لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا﴾ (94). ﴿وَكُلُّهُمْ ءَاتِيهِ يَوْمَ الْقِيَمَةِ فَرْدًا﴾ (95). ﴿(مریم الآيات 88-95)﴾