

Activité 1 — Calcul numérique

$\mathbf{A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + 1$ $\qquad$ $\mathbf{B} = 3 \times \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{4^3 + 5 \times 4^7}{2^8}}$ $\qquad$ $\mathbf{D} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{50} + 2\sqrt{128}$

$\mathbf{E} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{55}}{3} \times \sqrt{75}$ $\qquad$ $\mathbf{F} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{3}{\sqrt{3}}$

Activité 2 — Développement et factorisation

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer et simplifier :
   $A = (a^2 - a + 1)(a - 1)$ $\qquad$ $B = (2a - 3)(3a + \frac{1}{3})$
2. Développer et simplifier :
   $C = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$ $\qquad$ $D = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2$
3. Montrer que $\left(\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $((9 + \sqrt{5})^3 + (9 - \sqrt{5})^3) \in \mathbb{N}$.
5. Factoriser :
   $G = (x^2 - 2x + 1) - (2x + 1)(x - 1)$
   $H = (2x - 6)x + (x^2 - 9)$
   $I = (x^2 - 5) - 4x(x + \sqrt{5})$
   $J = (x^2 - 1) + 3x(x^2 - 1)$

Activité 3 — Équations et systèmes

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   a) $\frac{3x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = x$ $\qquad$ b) $2\sqrt{2}\,x - 1 = 3x$
   c) $|2x - 1| = 0$ $\qquad$ d) $|3x - 1| = |2x + 1|$
2. Résoudre :
   a) $x^2 - 5x + 15 = 0$ $\qquad$ b) $x^2 - 7x + 12 = 0$
3. a) Résoudre $x^2 - x - 6 = 0$.
   b) En déduire les solutions de
   $x - \sqrt{x} - 6 = 0$ et $x^2 - \frac{6}{x^2} - 1 = 0$.
4. a) Résoudre $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$.
   b) Montrer que le système $\begin{cases} 4x + my = 7 \\ 2mx - y = 1 \end{cases}$
   admet une solution unique.

Activité 4 — Ordre dans $\mathbb{R}$

1. Comparer :
   a) $X = 2\sqrt{5} - 5$ $\qquad$ b) $Y = \sqrt{45} - 20\sqrt{5}$
   c) $X = 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ $\qquad$ d) $Y = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
2. Soient a, b tels que $-3 < 2a - 1 < 5$, $|b - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$.
   a) Encadrer a, b. $\qquad$ b) Encadrer $a - 2b$ et ab.
3. Soit $0 < x < 1$, $y = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$.
   a) Montrer $\frac{1}{2} < y < 1$. $\qquad$ b) Montrer $\frac{y-1}{x-1} = \frac{1}{2(1+\sqrt{x})}$.
   c) Montrer $|y - 1| < \frac{1}{2}|x - 1|$.
   d) En déduire une approximation de $\frac{1+\sqrt{0,8}}{2}$.

Activité 5 — Les inéquations

1. Déterminer le signe :
   a) $A(x) = 3x^2 - 4x + 1$ $\qquad$ b) $A(x) = -2x^2 + x + 1$
2. Résoudre :
   a) $(x - 2)(1 - 3x) > 0$ $\qquad$ b) $1 - 2x \leq 0$
   c) $-\frac{2x^2 + 5x - 1}{x - 3} \leq 2$ $\qquad$ d) $\frac{x+1}{x} \leq \frac{2}{x+1}$
3. Comparer $\frac{x}{x+1}$ et $\frac{x-1}{2x+1}$.

Activité 6 — Les polynômes

1. Diviser $P(x)$ par $(x - a)$:
   a) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 5, \qquad a = 2$
   b) $P(x) = -2x^4 + x^2 - 1, \qquad a = 1$
   c) $P(x) = x^3 - 3x^2 - x - 2, \qquad a = -3$
2. Soit le polynôme : $Q(x) = x^2 - x + (\sqrt{2} - 2)$.
   Vérifier que $\sqrt{2}$ est racine et trouver l'autre.

Activité 7 Calcul vectoriel

Soit ABC un triangle. M, N et P sont trois points tels que :
M est le milieu du segment $[AC]$,

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{MP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

1. Faire une figure.
2. a.) Écrire $\overrightarrow{NM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b.) Vérifier que $3\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.
   c.) Montrer que $\overrightarrow{BP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.
3. En déduire que P est le point d'intersection des droites (BC) et (MN).

Activité 8 Droite dans le plan

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(1; 2)$, $B(3; 1)$ et $C(2, -1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Montrer que le triangle ABC est isocèle.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 3)$.
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par B et parallèle à la droite (D).

5. Déterminer les coordonnées du point P intersection de la droite (AB) et la droite définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Activité 9 Produit Scalaire

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$.

1. On suppose que ABC est équilatéral.
   a.) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   b.) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. On suppose que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -5$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. On suppose que ABC est isocèle de sommet C. Soit I le milieu du segment $[AB]$ tel que $IC = 4$. Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $\quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{IC}$ $\quad \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{IC}$
4. On suppose que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3\sqrt{2}$ et $AC = 2$.
   a.) Calculer $\cos(\widehat{BAC})$, en déduire la valeur du $\sin(\widehat{BAC})$.
   b.) Calculer BC.

Activité 10 Calcul trigonométrique

1. Soit x un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $A = \sin x \cdot \cos x(\tan x - \tan(\frac{\pi}{2} - x))$.
   a.) Montrer que $A = \sin^2 x - \cos^2 x$.
   b.) Sachant que $A = \frac{3}{5}$; Montrer que $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, puis déduire la valeur de $\tan x$.
2. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos(\pi - x) + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) - 3\cos x.$$

$$B = \sin x\left[(2\sin x - \cos x)^2 + (2\cos x + \sin x)^2\right].$$

Activité 11 Calcul trigonométrique

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(2\cos x - \sqrt{3})\tan x = 0$

1.) Déterminer D l'ensemble de définition de l'équation (E).
2.) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) puis représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
3.) Déterminer les solutions de (E) qui appartiennent à l'intervalle $\left[-\frac{41\pi}{3}; -\frac{35\pi}{3}\right]$.
4.) Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $(2\cos x - \sqrt{3})\tan x > 0$.

Activité 12 Fonctions de références

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On considère les fonctions f et g définies par

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{3 - x}{-x + 2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.
2. Étudier les variations de f sur les intervalles I et J tels que $I = [2; +\infty[$ et $J =]-\infty; 2]$.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (C_f) représentative de la fonction f.
4. Déterminer les coordonnées de l'intersection de (C_f) avec les axes du repère.
5. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe C_g représentative de la fonction g.
6. Dresser le tableau des variations de g.
7. Construire (C_f) et (C_g) dans le même repère.

Activité 13 Fonctions de références

Soit f et g deux fonctions définies par :
$f(x) = x^2 + 4x$ et $g(x) = -\frac{x}{x+4}$
(C') et (C'') sont les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'intersection de chacune des courbes (C') et (C'') avec l'axe des abscisses.
2. Calculer $f(-3)$; $g(-3)$; $f(-5)$ et $g(-5)$.
3. a) Développer et réduire $(x+2)^2 - 4$, en déduire la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (C').
   b) Construire (C') dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
4. a) Exprimer $g(x)$ sous la forme $g(x) = a + \frac{b}{x+4}$, puis dresser le tableau des variations de g.
5. Construire (C') dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Utiliser une autre couleur).
6. Résoudre graphiquement l'inéquation :

$$\frac{1}{x+4} - x - 4 \geq 0$$

7. Soit h la fonction définie par $h(x) = x(4 - |x|)$.
   a) Montrer que h est une fonction impaire.
   b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x|x| - 4x + m = 0$