Exercice N°4

Soit $(u_n)_n$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < u_n < 4$

2) Etudier la monotonie de $(u_n)_n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

3) Prouver que $(v_n)_n$ est une suite géométrique

4) Déterminer v_n en fonction de n

5) déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4 \times 3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$

exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = 2^n u_n$

- montrer que $(v_n)_n$ est arithmétique
- déterminer v_n puis u_n en fonction de n

on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T = \prod_{k=1}^n u_k ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. montrer que $S_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ et $T_n = \frac{(n+1)!}{2^{n^2}}$ □

exercice N°6

$(u_n)_n$ une suite telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4n - u_n \end{cases}$

- calculer $u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_4
- montrer que $(u_{2n})_n$ est arithmétique
- déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n
pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n + 1 - 2n$
- prouver que $(v_n)_n$ est géométrique
- déterminer v_n et u_n en fonction de n

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - \alpha$

- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq n$
- Déduire que $(u_n)_n$ n'est pas majorée
- déterminer α pour que $(v_n)_n$ soit géométrique
- on prend $\alpha = -1$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
déterminer v_n et u_n en fonction de n
puis S_n en fonction de n

exercice N°2

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < u_n \leq 2$
- montrer que $(u_n)_n$ est décroissante
- montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique
- déterminer u_n en fonction de n puis calculer

$$S_{2017} = \sum_{k=0}^{2016} v_k$$

exercice 3

$(u_n)_n$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

- montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 3$
- étudier la monotonie de $(u_n)_n$
- a) montrer que $(v_n)_n$ est géométrique
b) calculer u_n en fonction de n
c) déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k \text{ et } P_n = \prod_{k=0}^n v_k \text{ en fonction de } n$$

Suites numériques

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

b) En déduire que $(U_n)_{n \geq 1}$ est bornée

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par

$$: U_0 = -1 \quad , \quad U_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n$$

1) on pose $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ et $W_n = 2^n U_n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique puis calculer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

3) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$ prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 3

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$U_0 = 2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} \left(U_n^2 - U_n + \frac{1}{2} \right)}$$

On pose $V_n = U_n^2 - U_n$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

2) a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8}{2^n}}$$

3) démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie

$$\text{par : } U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{7U_n + 6}{U_n + 2}$$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < 6$

b) étudier la monotonie de $(U_n)_n$

2) on pose $V_n = \frac{U_n - 6}{U_n + 1}$ pour tout

entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} - 6| \leq \frac{1}{2} |U_n - 6|$$

4) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n - 6| \leq 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ la suite telle que :

$$U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = U_n^2 + U_n$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

3) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} \geq 2U_n$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 2^n$

Exercice 6

$(U_n)_n$ une suite telle que :

$$U_0 = -2 \quad \text{et} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 2}{U_n - 2}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq -1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

Suites numériques

3) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1} + 1| \leq \frac{1}{2} |U_n + 1|$$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n + 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie

par : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (n+2)U_n}$ et $U_0 = \frac{1}{3}$

1) calculer U_1

2) on pose $V_n = \frac{1}{U_n} - n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) exprimer U_n en fonction de n

3) calculer en fonction de n

la somme $T_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_n}$

Exercice 8

Soit la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0 = 0 \quad , \quad U_1 = 1 \quad \text{et} \quad U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$$

1) on pose :

$$V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \quad \text{et} \quad W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$$

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique puis déterminer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est géométrique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire l'expression de U_n en fonction de n

Exercice 9

On considère les suites $(U_n)_{n \geq 1}$ et $(V_n)_{n \geq 1}$

telles que $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$, $V_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad V_n < U_n$

2) montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est

décroissante et que $(V_n)_{n \geq 1}$ est croissante

Exercice 10

(suite de Fibonacci)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie

par :
$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

1) a) montrer que $U_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

2) montrer que $U_n \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

3) montrer que $U_n U_{n+2} + (-1)^{n+1} = (U_{n+1})^2$

4) on pose $x_n = \frac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$ et $y_n = \frac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$

pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad y_n - x_n = \frac{1}{U_{2n} U_{2n+1}}$$

en déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < y_n - x_n < \frac{1}{n}$

b) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{U_{2n} U_{2n+2}}$$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad x_n = \frac{1}{y_n} - 1$

b) montrer que $(x_n)_n$ est croissante et $(y_n)_n$ décroissante

5) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U_k}{3^k}$

a) calculer $3S_n$ puis $3(3S_n - S_n)$

b) en déduire la relation liant

$$U_n \quad ; \quad S_{n-2} \quad , \quad S_n$$

6) prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

le nombre d'or : $\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

Exercice N°4

Soit $(u_n)_n$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8u_n - 8}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < u_n < 4$

2) Etudier la monotonie de $(u_n)_n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

3) Prouver que $(v_n)_n$ est une suite géométrique

4) Déterminer v_n en fonction de n

5) déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{4 \times 3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$

exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = 2^n u_n$

- montrer que $(v_n)_n$ est arithmétique
- déterminer v_n puis u_n en fonction de n

on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $T = \prod_{k=1}^n u_k ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. montrer que $S_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ et $T_n = \frac{(n+1)!}{2^{n^2}}$ □

exercice N°6

$(u_n)_n$ une suite telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4n - u_n \end{cases}$

- calculer $u_1 ; u_2 ; u_3$ et u_4
- montrer que $(u_{2n})_n$ est arithmétique
- déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n
pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n + 1 - 2n$
- prouver que $(v_n)_n$ est géométrique
- déterminer v_n et u_n en fonction de n

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - \alpha$

- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq n$
- Déduire que $(u_n)_n$ n'est pas majorée
- déterminer α pour que $(v_n)_n$ soit géométrique
- on prend $\alpha = -1$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$
déterminer v_n et u_n en fonction de n
puis S_n en fonction de n

exercice N°2

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 < u_n \leq 2$
- montrer que $(u_n)_n$ est décroissante
- montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique
- déterminer u_n en fonction de n puis calculer

$$S_{2017} = \sum_{k=0}^{2016} v_k$$

exercice 3

$(u_n)_n$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

- montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 3$
- étudier la monotonie de $(u_n)_n$
- a) montrer que $(v_n)_n$ est géométrique
b) calculer u_n en fonction de n
c) déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k \text{ et } P_n = \prod_{k=0}^n v_k \text{ en fonction de } n$$

Suites numériques

Exercice (1)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{1 + 2u_{n-1}} : \forall n \geq 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1- montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2- Calculer v_n puis u_n en fonction de n.

3- On pose : $w_n = 2^{v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

i-déterminer la nature de la suite $(w_n)_{n \geq 1}$.

ii-Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$.

Exercice (2)

Soit les suites :
$$\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_n = \frac{3u_{n-1} \times u_{n-2}}{2u_{n-1} + u_{n-2}} : \forall n \geq 2 \end{cases}$$

On pose $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}$.

1- montrer que $(v_n)_{n \geq 1}$ est géométrique en déterminant sa raison q et son premier terme.

2- calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^n v_k$

en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice (3)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_{n+1} = \frac{n+3+2na_n}{3n+3} : \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad b_n = n(1-a_n)$$

1- montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n < 1$ et que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

2- montrer que $(b_n)_n$ est une suite géométrique

3- calculer a_n en fonction de n .

4- calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^n ka_k$.

Exercice (4)

$(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite arithmétique dont les termes sont toutes non nulles.

1- montrer que :

$$\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}} = \frac{n}{u_1 u_{n+1}}$$

2- calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$T_n = \frac{1}{10 \times 11} + \frac{1}{11 \times 12} + \dots + \frac{1}{99 \times 100}$$

Exercice (5)

$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 & ; & v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + v_n}{6} & ; & v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1- montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < v_n$

2- montrer que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante.

3- montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(v_n - u_n).$$

4- déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n - u_n \leq 6 \left(\frac{5}{6} \right)^n$

Exercice (6)

Soit la suite :
$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}} \right) \\ u_1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

1- montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n > \sqrt{2}$.

2-a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left(u_n - \sqrt{2} \right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} \left(u_n - \sqrt{2} \right)$

et que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n - \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

Exercice (7)

Soient les suites :

$$\begin{cases} u_0 = 5 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n & ; & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et } v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$.

2- déterminer de deux manières la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k \quad \text{et déduire } u_n \text{ en fonction de n.}$$

Suites numériques

Exercice 1

Calculer les trois premiers termes des suites suivantes :

$$1) U_n = 2^n - n \quad 2) V_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$3) W_0 = 2 \text{ et } W_{n+1} = \frac{2W_n + 1}{W_n + 2}$$

$$4) T_1 = 3 \text{ et } T_n = \frac{1}{2}T_{n-1} + 2$$

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3$$

Montrer que $(U_n)_n$ est majorée par 5

Exercice 3

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3}$$

1) montrer que $(U_n)_n$ est minorée par -1

2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < 1$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < 3$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) Déterminer U_n en fonction de n

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique telle que :

$$U_3 = 5 \text{ et } U_{11} = 29$$

1) déterminer la raison r de la suite $(U_n)_n$

2) calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{11}$

Exercice 6

Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < 2$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{2}{U_n - 2}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) Déterminer U_n en fonction de n

c) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ en fonction de n

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = 2U_n - 1$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > 1$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $X_n = U_n - 1$

a) montrer que $(X_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

c) calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$

Exercice 8

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -\frac{3}{4} \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$$

1) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = 1 - \frac{6}{2U_n + 5}$

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 < U_n < -\frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

4) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| U_{n+1} + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{6}{7} \left| U_n + \frac{1}{2} \right|$$

b) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| U_n + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{6}{7} \right)^n$$