

Exercice 1

ABC un triangle. G et E deux points tels que : G est le centre de gravité du triangle ABC et E le barycentre du système des points pondérés $\{(A; 1); (B; 5); (C; -3)\}$.

1. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que les deux droites (BC) et (GE) sont parallèles.
3. Soient I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CJ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CB}$.
 - (a) Montrer que I est le barycentre de $\{(A; 1); (B; 5)\}$ et que J est le barycentre de $\{(B; -5); (C; 3)\}$.
 - (b) En déduire que les droites (AJ) et (IC) sont sécantes.
 - (c) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}\|$

Exercice 2

ABC un triangle. On considère les points N , L et E tels que :

B est le milieu de $[AN]$; $\overrightarrow{AL} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

1. Construire : N , L et E puis exprimer ces points sous forme de barycentre.
2. Montrer que les points N , L et E sont alignés.
3. Soit K le milieu de $[NE]$; $I = \text{bar}\{(B; 2), (C; 1)\}$; et $J = \text{bar}\{(A; 2), (B; 3)\}$. Construire les points I , J et K .
4. Déterminer l'ensemble Ψ de points M du plan tel que : $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 10$
5. On considère le repère : $\mathcal{R} = (A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
 - (a) Vérifier que $N(2; 0)$ et $E(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$ puis en déduire les coordonnées du point K .
 - (b) Montrer que : $I(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ et $J(\frac{3}{5}; 0)$.
 - (c) Montrer que les points I , J et K sont alignés.

Exercice 3

Soit ABC un triangle, et on considère les points G et E tels que :

$\overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ et $G = \text{bar}\{(A; 1); (B; -1); (C; 2)\}$.

1. Montrer que E est le barycentre de $\{(B; -1); (C; 2)\}$.
2. Montrer que G est le milieu de $[AE]$.
3. Soit K le barycentre de $\{(A; 1); (C; 2)\}$.
 - (a) Montrer que les points B , G et K sont alignés.
 - (b) Montrer que K est le centre de gravité du triangle ABE .
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $2 \times \|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ME}\|$

Exercice 4

ABC un triangle. H un point vérifiant $2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $G = \text{bar}\{(A; 3); (B; -1); (C; 2)\}$

1. Montrer que $H = \text{bar}\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ où α et β sont des réels à déterminer et $\alpha > 0$
2. Construire les points G et H .
3. Montrer que G est le milieu de $[HC]$.
4. Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que : $\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| \leq 2\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\|$
Déterminer puis construire l'ensemble Γ .
5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on prendra $A(0; 1)$, $B(0; 5)$ et $C(2; 1)$.
Soit $G_m = \text{bar}\{(A; -m^2 + 4); (B; m^2 - 2m); (C; 2m)\}$
 - (a) Déterminer les valeurs du paramètre réel m pour que G_m existe.
 - (b) Déterminer les coordonnées de G_m en fonction de m .
 - (c) Déterminer le lieu géométrique du point G_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est la construction du barycentre de 4 points.

$ABCD$ un quadrilatère dans le plan. $G = \text{bar}\{(A; 2); (B; 1); (C; -3); (D; 1)\}$.

I. Méthode 1 : (on utilise la propriété caractéristique)

Soit M un point du plan.

1. Simplifier : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
2. Ecrire $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$
3. Construire le point G .

II. Méthode 2 : (on utilise le barycentre de deux points)

Soient $I = \text{bar}\{(A; 2); (B; 1)\}$, $J = \text{bar}\{(C; -3); (D; 1)\}$.

1. Construire les points I et J .
2. En déduire que : $3\overrightarrow{GI} - 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ puis construire G .

III. Méthode 3 : (on utilise le barycentre de trois points)

Soient $K = \text{bar}\{(A; 2); (B; 1); (D; 1)\}$ et $L = \text{bar}\{(B; 1); (D; 1)\}$

1. Vérifier que K est le barycentre des points : $(A; 2); (L; 2)$.
2. Vérifier que G est le barycentre des points : $(K; 4)$ et $(C; -3)$ puis construire G .

Exercice 6

Soit OAB un triangle.

Posons : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$; et on considère le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$; le barycentre G du système $\{(O; 3); (A; 2m + 3); (B; -2m + 3)\}$ existe.
- 2) Déterminer en fonction de m les coordonnées de G .

﴿وَمَا تَشَاءُونَ إِلَّا أَنْ يَشَاءَ اللَّهُ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمًا﴾ (30) • يُدْخِلُ مَنْ يَشَاءُ فِي رَحْمَتِهِ وَالظَّالِمِينَ أَعَدَّ لَهُمْ عَذَابًا أَلِيمًا (31) • ﴿(الإنسان الآيات 30-31)﴾