Exercice 1

Soit ABC un triangle dans le plan $\mathcal{P}$.

Soient I et J deux points du plan $\mathcal{P}$ tels que : $\overrightarrow{BI} = \alpha\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ} = \alpha\overrightarrow{AC}$ avec $\alpha \in]0;1[$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{IC} = (1-\alpha)\overrightarrow{BC}$.
2. En déduire que I est le barycentre du système pondéré : $\left\{(C;1)\,;\left(B;\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\right\}$.
3. Montrer que : $J = \text{bar}\left\{(C;1)\,;\left(A;\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\right\}$.
4. On considère G le barycentre du système : $\left\{(C;1)\,;\left(B;\dfrac{1}{\alpha}-1\right);\left(A;\dfrac{1}{\alpha}-1\right)\right\}$.

   Vérifier que : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2-\alpha}\overrightarrow{AI}$.
5. Montrer que les points J, G et B sont alignés.
6. Soit K le milieu du segment $[AB]$. Montrer que les droites $(AI), (BJ)$ et (CK) sont concourantes en un point à déterminer.
7. Déterminer l'ensemble : $\Omega = \left\{M \in \mathcal{P} \,\middle|\, 2\left\|(1-\alpha)\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{MC}\right\| = (2-\alpha)\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\|\right\}$.

Exercice 2

Soit f et g les fonctions numériques définies par : $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) Vérifier que $f(2) = g(2)$ puis interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Tracer les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x-1} < 0$.
3. Déterminer graphiquement les images des intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$ par la fonction f.
4. Soit h la fonction numérique définie par : $h(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$.
   (a) Déterminer D_h ensemble de définition de h.
   (b) Vérifier que : $(\forall x \in D_h) \quad h(x) = g \circ f(x)$.
   (c) Étudier les variations de la fonction h sur les intervalles $[0;1]$ et $[1;2]$.

Exercice 3

On considère la fonction ψ définie par : $\psi(x) = \left(x - 2E\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\left(2E\left(\dfrac{x}{2}\right) - x + 2\right)$, où E désigne la fonction partie entière.

1. Montrer que ψ est périodique de période 2.
2. Simplifier l'expression de ψ sur l'intervalle $[0;2[$.
3. Construire la courbe (C_ψ) sur l'intervalle $[-4;4]$ dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 4

Soit m un réel strictement positif et la fonction f définie par : $f_m(x) = \dfrac{x^2}{m} - 2x$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f_m puis déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : \dfrac{x^2}{m} + m \geq 2x$.
2. Soient a, b et c des nombres réels de $\mathbb{R}^+$. Déduire que : $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{a} \geq a + b + c$.