

Exercice 1 (16pts)

Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x) = \frac{x+2}{x}$ et $g(x) = x^2 + 2x$

Partie I

- (a) Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et g (1pt)
- (b) Quelle est la nature des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$? Donner leurs éléments caractéristiques. (1pt)
- (a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f(x) = g(x) \iff (x+2)(x^2-1) = 0$ (0.5pt)
- (b) En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ se coupent en trois points à déterminer. (1pt)
- (a) Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$ avec l'axe des abscisses. (1pt)
- (b) Tracer dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les deux courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$. (2pts)
- (c) Déterminer graphiquement : $f([-\infty; -1])$, $f([-1; 0])$ et $f([0; +\infty])$ (0.75pt)
- (d) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\frac{2}{x} \geq (x+1)^2 - 2$ (0.75pt)

Partie II

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = 3 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2}$

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) \geq -1$, puis en déduire la valeur minimale de h sur $\mathbb{R}^*$ (1pt)
- Montrer que : $h = g \circ f$ (1pt)
- Déterminer les variations de h sur chacun des intervalles $] -\infty; -1]$ et $[-1; 0[$ et $]0; +\infty[$ (1.5pts)
- Dresser le tableau de variations de la fonction h (0.5pt)

Partie III

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \notin [-2; 1] \\ F(x) = g(x) & \text{si } x \in [-2; 1] \end{cases}$$

- Calculer $F(0)$ et $F(2)$ (0.5pt)
- (a) Dresser le tableau de variation de F (1pt)
- (b) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_F)$ dans un autre repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (1pt)
- (c) Discuter suivant la valeur du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $F(x) = m$.. (1.5pts)

Exercice 2 (4pts)

On considère la fonction numérique K définie sur $\mathbb{R}$ par : $K(x) = \left(x - 2E\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(2E\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2\right)$

- Montrer que K est une fonction périodique de période 2. (1pt)
 - Calculer $K(1)$ et $K\left(\frac{5}{2}\right)$ (0.5pt)
 - Montrer que : $\forall x \in [0; 2[; K(x) = -x^2 + 2x$ (1pt)
 - Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que : (1.5pts)
- $x \text{ est pair} \Rightarrow K(x) = 0 \quad ; \quad x \text{ est impair} \Rightarrow K(x) = 1$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ طَسَّ تِلْكَ ءَايَتُ الْقُرْآنِ وَكِتَابِ مُبِينٍ (1) • هُدًى وَبُشْرَى لِلْمُؤْمِنِينَ (2) • الَّذِينَ يُقِيمُونَ الصَّلَاةَ وَيُؤْتُونَ الزَّكَاةَ وَهُمْ بِالْآخِرَةِ هُمْ يُوقِنُونَ (3) • إِنَّ الَّذِينَ لَا يُؤْمِنُونَ بِالْآخِرَةِ زِينَتًا لَّهُمْ أَعْمَلُهُمْ فَهُمْ يَعْمَهُونَ (4) • أُولَئِكَ الَّذِينَ لَهُمْ سُوءُ الْعَذَابِ وَهُمْ فِي الْآخِرَةِ هُمْ الْآخَسُونَ (5) • وَإِنَّكَ لَتَلْقَى الْقُرْآنَ مِنْ لَدُنْ حَكِيمٍ عَلِيمٍ (6) • ﴿النمل الآيات 1-6﴾