

Exercice 1

On considère les fonctions : $f(x) = x^2 + 2x + 2$ et $g(x) = \frac{4x+2}{x-1}$

1. (a) Donner les tableaux de variations de f et de g (1pt)
- (b) Quelle est la nature de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$? (1pt)
2. (a) Développer $(x+1)(x^2-4)$ puis déduire les points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (1,5pt)
- (b) Tracer dans un même repère orthonormé $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (1,5pt)
- (c) Résoudre graphiquement $\frac{x+2}{x-1} \geq \frac{x^2}{2} + x$ (1pt)
3. Soit F la fonction définie par : $F(x) = x + 2\sqrt{x-2}$.
 - (a) Déterminer la fonction h telle que : $F(x) = f \circ h(x)$ (0,75pt)
 - (b) Étudier le sens de variation de F sur $[2, +\infty[$ (0,75pt)

Exercice 2

Soit m un paramètre de $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction f_m définie sur $D = \mathbb{R}_+^*$ par : $f_m(x) = \frac{2x}{m^2} + \frac{m}{x^2}$

1. (a) Montrer que $(\forall (x, y) \in D^2) \quad f_m(x) - f_m(y) = (x - y) \left(\frac{2}{m^2} - \frac{m(x+y)}{x^2 y^2} \right)$ (1pt)
 - (b) Montrer que f_m est croissante sur $[m, +\infty[$ et décroissante sur $]0, m]$ (1,5pt)
 2. En déduire que : $(\forall x \in D) \quad f_m(x) \geq \frac{3}{m}$ (1pt)
 3. Déduire de ce qui précède que : (1,5pt)
- peut être cette question doit être :
- $$(\forall (a, b, c) \in D^3) \quad \frac{a+2c}{b^2} + \frac{a+2c}{b^2} + \frac{a+2c}{b^2} \geq 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$
- à vérifier.

Exercice 3

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble suivant : $I_\alpha = \{x \in \mathbb{R} / |3x - \alpha| < 2\}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble I_α (1pt)
 - (b) Déterminer les valeurs de α telles que : $I_\alpha \cap [0, 1] = \emptyset$ (1pt)
 - (c) Déterminer les valeurs de α telles que : $I_\alpha \subset [1, 2]$ (1pt)
2. On considère les deux ensembles suivants :

$$A = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* / \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{5} \right\} \quad ; \quad B = \{x^2 - 2x + \quad / x \in [-1, 2]\}$$
 - (a) Montrer que $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ (0,5pt)
 - (b) A-t-on $0 \in B$? Qu'en est-il de 2? (1pt)
 - (c) Montrer que $B \subset [1, 5]$. Est-ce que $[1, 5] \subset B$? (1pt)
 - (d) Montrer que $(n, m) \in A \iff (n-5)(m-5) = 25$. Puis déterminer A en extension. (1pt)