

Exercice 1 (9pts)

On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 3$ 0.5pt
 b) f est-elle surjective? Justifier 0.5pt
- 2) Montrer que f est injective. 1pt
- 3) On considère l'application $g :]2; +\infty[\rightarrow]3; +\infty[$
 $x \mapsto g(x) = f(x)$
 a) Montrer que $g(]2; +\infty[) =]3; +\infty[$ 1pt
 b) En déduire que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque g^{-1} 2pt
- 4) Montrer que $g(]9; +\infty[) =]3; 4]$ et $g^{-1}(]10; +\infty[) =]2; 3]$ 2pt
- 5) Soit $h : E \rightarrow F$ une application.
 Montrer que $(\forall A, B \in \mathcal{P}(E)) : A \subset B \Rightarrow h(A) \subset h(B)$ et $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$ 1pt
- 6) Montrer que la composée de deux applications injectives est injective. 1pt

Exercice 2 (11pts)

On considère les fonctions numériques f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+4}$ et $g(x) = x^2 - 4x + 5$.

- 1) Déterminer D_f, D_g puis dresser les tableaux de variations de f et de g 0.5pt
- 2) Montrer par deux méthodes que 1 est la valeur minimale de g sur D_g 1pt
- 3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C_g) 0.5pt
- 4) Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère. 1pt
- 5) Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 2pt
- 6) a) Déterminer graphiquement $f([-3; 0])$ et $f([0; +\infty[)$ 0.5pt
 b) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) < 2$ 0.5pt
 c) Déterminer graphiquement en justifiant le nombre de solution de l'équation $g(x) = f(x)$ 0.5pt
 d) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$ avec $m \in \mathbb{R}$ 0.5pt
- 7) On considère la fonction numérique φ définie par $\varphi(x) = x^2 - 4|x| + 5$.
 a) Vérifier que φ est paire et que $(\forall x \in [0; +\infty[) \varphi(x) = g(x)$ 1pt
 b) Tracer la courbe (C_φ) dans le repère précédent en justifiant la méthode de construction. 1pt
- 8) On considère la fonction numérique h définie sur $[-4; +\infty[$ par $h(x) = x + 9 - 4\sqrt{x+4}$.
 a) Montrer que $(\forall x \in [-4; +\infty[) h(x) = g \circ f(x)$ 0.5pt
 b) En déduire les variations de h sur $[-3; 0]$ 1pt
- 9) On considère la fonction numérique k définie par $k(x) = E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) - E(2x)$.
 Montrer que k est une fonction périodique de période $\frac{1}{2}$ 0.5pt

﴿بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ وَالْعَصْرِ (1)﴾ إِنَّ الْإِنْسَانَ لَفِي خُسْرٍ (2) ﴿إِلَّا الَّذِينَ ءَامَنُوا وَعَمِلُوا الصَّالِحَاتِ وَتَوَّصُوا بِالحَقِّ وَتَوَّصُوا بِالصَّبْرِ (3)﴾ ﴿العصر الآيات 1-3﴾