

Exercice 1

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E .

Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$ ainsi que $\bar{A} \cap B$.

- $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$.
- $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [3; +\infty[$.
- $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$.

Exercice 2

Soit A un ensemble, et X , Y et Z des parties de A . Démontrer les propriétés suivantes :

- $C_A(C_A(X)) = X$.
- $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.
- $X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Exercice 3

Soient A et B deux ensembles.

- Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité?

Exercice 4

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On définit la différence symétrique de A et de B par : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- Que valent $A \triangle A$ et $A \triangle \emptyset$?
- Montrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Montrer que $A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$.
- Montrer que $(A \triangle B) \triangle B = A$.

Exercice 5

Soit f une application de E vers F . Soient A et A' des parties de E . Soient B et B' des parties de F . Montrer que :

- $A \subset f^{-1}(f(A))$
- $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
- $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
- $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Exercice 6

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives?

- f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
- g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
- h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
- u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

﴿ذَلِكَ بِأَنَّ اللَّهَ يُوجِّعُ اللَّيْلَ فِي النَّهَارِ وَيُوجِّعُ النَّهَارَ فِي اللَّيْلِ وَأَنَّ اللَّهَ سَمِيعٌ بَصِيرٌ﴾ (61). ذَلِكَ بِأَنَّ اللَّهَ هُوَ الْحَقُّ وَأَنَّ مَا يَدْعُونَ مِنْ دُونِهِ هُوَ الْبَاطِلُ وَأَنَّ اللَّهَ هُوَ الْعَلِيُّ الْكَبِيرُ (62). أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَتَصْبِحُ الْأَرْضُ مُخْضَرَّةً إِنَّ اللَّهَ لَطِيفٌ خَبِيرٌ (63). لَهُمْ مَا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ إِنَّ اللَّهَ لَوَّعْنُ الْخَمِيدُ (64). أَلَمْ تَرَ أَنَّ اللَّهَ يَخْرِقُ لَكُمْ مَا فِي الْأَرْضِ وَالْفَلَكَ تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِأَمْرِهِ وَيُمْسِكُ السَّمَاءَ أَنْ تَقَعَ عَلَى الْأَرْضِ إِلَّا بِإِذْنِهِ إِنَّ اللَّهَ بِالنَّاسِ لَرءُوفٌ رَحِيمٌ (65). ﴿ (الحج الآيات 61-65)