Exercice 1

On considère l'application f définie par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2+4x+1 \end{aligned}$

1. a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-4-x) = f(x)$.
   b) f est-elle injective ? Justifier la réponse.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -4$.
   b) f est-elle surjective ? Justifier la réponse.
3. Montrer que : $f(\mathbb{R}) = [-3, +\infty[$ puis déterminer $f^{-1}([-2, 1])$.
4. On considère g la restriction de l'application f sur l'intervalle $[-2, +\infty[$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[-2, +\infty[$ vers $[-3, +\infty[$.
   b) Déterminer l'application réciproque g^{-1}.
5. a) Calculer $g(g^{-1}(x))$ pour tout $x \in [-3, +\infty[$.
   b) Calculer $g^{-1}(g(x))$ pour tout $x \in [-2, +\infty[$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x+y, x-3y) \end{aligned}$

1. Montrer que f est injective et surjective.
2. Déterminer la bijection f^{-1} de f.

Exercice 3

On considère l'application f définie par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. On considère g la restriction de l'application f sur l'intervalle $[-1, 1]$.
   a) Montrer que g réalise une bijection de $[-1, 1]$ vers $[-1, 1]$.
   b) Déterminer l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 4

On considère l'application f définie par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{Z} \times [0, 1[&\to \mathbb{R} \\ (n, x) &\mapsto n+x \end{aligned}$

1. Montrer que f est injective et surjective.
2. En déduire que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5

On considère l'application f définie par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$

Montrer que f est bien définie et bijective, et déterminer $f^{-1}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6

On considère l'application f définie par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (-x^2, y^2) \end{aligned}$

1. f est-elle injective ? Surjective ?
2. Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ vers $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ et définir g^{-1}.

Exercice 7

On considère l'application g définie par : $\begin{aligned} g \,:\, \left[0, \frac{1}{4}\right] &\to \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \\ x &\mapsto x - \sqrt{x} \end{aligned}$

Montrer que g est une application bijective, puis déterminer l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 8

On considère les applications f et g définies par : $\begin{aligned} f \,:\, \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto x - \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$ $\quad \begin{aligned} g \,:\, \mathbb{R} &\to [0, 1[\\ x &\mapsto x - E(x) \end{aligned}$

1. Montrer que f est injective et que g n'est pas injective.
2. Montrer que f et g sont surjectives. Déterminer $f^{-1}(\{-1\})$ et $g^{-1}(\{0\})$.
3. On considère l'application h définie par : $\begin{aligned} h \,:\, \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^*_- \times [0, 1[\\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$
   Montrer que h est injective. h est-elle surjective ?
4. Déterminer l'application réciproque de f.

Exercice 9

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et $\begin{aligned} \Psi \,:\, &\mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ &X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$

1. Étude de l'injectivité de Ψ.
    a) Calculer $\Psi(\emptyset)$.
    b) Calculer $\Psi(\overline{A \cup B})$.
    c) Prouver que Ψ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Étude de la surjectivité de Ψ.
    a) Le couple $(\emptyset, B)$ admet-il un antécédent par Ψ ?
    b) Prouver que Ψ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 10

Soit $f \,:\, E \to F$ une application. Montrer que :

1. f est injective $\iff \forall A \in \mathscr{P}(E),\; A = f^{-1}(f(A))$.
2. f est surjective $\iff \forall B \in \mathscr{P}(F),\; f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E),\; f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$.

Exercice 11

Soit A une partie d'un ensemble non vide E. On considère l'application f_A définie par :

$$\begin{aligned} f_A \,:\, &E \to \{0,1\} \\ &x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

1. Montrer que : $\forall x \in E,\; f_A(x) + f_{\overline{A}}(x) = 1$.
2. Soit B une partie de E.
    a) Montrer que : $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$.
    b) Montrer que : $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B}$.

﴿بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُوا۟ رَبَّكُمْ ۚ إِنَّ زَلْزَلَةَ ٱلسَّاعَةِ شَىْءٌ عَظِيمٌ (1)• يَوْمَ تَرَوْنَهَا تَذْهَلُ كُلُّ مُرْضِعَةٍ عَمَّآ
أَرْضَعَتْ وَتَضَعُ كُلُّ ذَاتِ حَمْلٍ حَمْلَهَا وَتَرَى ٱلنَّاسَ سُكَٰرَىٰ وَمَا هُم بِسُكَٰرَىٰ وَلَٰكِنَّ عَذَابَ ٱللَّهِ شَدِيدٌ (2)•﴾
(الحج الآيات 1-2)