Exercice 1

1,5 On considère les ensembles :

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y \neq -1\}$$

$$\text{et } D = \left\{ \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) / t \in \mathbb{R} \right\}.$$

1- Montrer que : $D \subset C$.

1,5 **2-** Soit $(x,y) \in C$. En posant $t = \dfrac{x}{1+y}$, vérifier que $1 + t^2 = \dfrac{2}{1+y}$, puis montrer que $(x,y) \in D$ et en déduire que : $C = D$.

Soient A, B et C' trois parties d'un ensemble Ω. On note $\overline{X}$ le complémentaire dans Ω d'une partie X.

1 **3-** Montrer que : $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$.

1 **4-** Montrer que : $A \subset B \implies A \cup C' \subset B \cup C'$.

Exercice 2

2 On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow]-1,1[$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

1- Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ |f(x)| < 1$, puis montrer que f est injective.

2,5 **2-** Montrer que f est surjective, et que : $(\forall x \in]-1,1[)\ f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-|x|}$.

1 **3-** Montrer que : $f^{-1}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = [-1,1]$.

Exercice 3

2,5 On considère l'application $F : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ définie par : $F(x,y) = (2x+y, x+y)$.

1- Montrer que F est bijective et que : $(\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2)\ F^{-1}(a,b) = (a-b, 2b-a)$.

1,5 **2-** Montrer que : $(F \circ F)(x,y) = (5x+3y, 3x+2y)$. Justifier que $F \circ F$ est bijective et calculer $(F \circ F)^{-1}(1,1)$.

1 **3-** On pose : $\Delta = \{(x,-x)/x \in \mathbb{Z}\}$. Calculer $F(x,-x)$, puis montrer que : $F(\Delta) = \{(a,0)/a \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4

2 On considère les applications $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par : $s(n) = n+1$

et $t(n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.

1- Montrer que s est injective et non surjective, et que t est surjective et non injective.

2,5 **2-** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ t(s(n)) = n$, puis calculer $s(t(0))$. A-t-on : $(\forall n \in \mathbb{N})\ s(t(n)) = n$?