Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;1[$ par : $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{1-x}\right)$

1) Montrer que : $(\forall x\in]0;1[)\quad f(x)=1-\frac{2}{x^2-x}$

2) Soit x et y deux éléments distincts de l'intervalle $]0;1[$.

   a) Montrer que : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=\frac{2(x+y-1)}{(x^2-x)(y^2-y)}$

   b) Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles : $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2};1\right[$

3) Soit a et b deux réels strictement positifs tels que : $a+b=1$
   En utilisant ce qui précède montrer que : $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9$

Exercice 2

On considère l'application f définie par : $f:\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto\sqrt{4x^2-4x+3}\end{cases}$

1) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ f(1-x)=f(x)$. f est-elle injective ?

2) Montrer que : $f(\mathbb{R})\subset[\sqrt{2};+\infty[$. f est-elle surjective ?

3) Soit g l'application définie par : $g:\begin{cases}\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\to[\sqrt{2};+\infty[\\ x\mapsto f(x)\end{cases}$
   Montrer que g réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ sur $[\sqrt{2};+\infty[$ puis définir g^{-1}.

4) En déduire que l'équation $g(x)=2026$ admet une solution unique dans $[1;+\infty[$

Exercice 3

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=E(nx)-\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)$

1) Montrer que f est périodique de période $T=\frac{1}{n}$.

2) Calculer $f(x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right[$

3) En Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ E(nx)=\sum_{k=0}^{n-1}E\left(x+\frac{k}{n}\right)$.