

Correction DS1S01 - 1BACSM de: Prof HIYAB

Par : Prof **MOSAID**

1 Exercice 1

1. Soit $P : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2xy \leq \frac{x^2 + 4y^2}{2}$

On a $\bar{P} : \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2xy > \frac{x^2 + 4y^2}{2}$

Soit $Q : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 9x - 36$

On a $\Delta = 9^2 - 4(1)(-36) = 225 = 15^2$

Donc ils existent deux reals qui vérifie la proposition,
donc vraie

b. On a

$$\begin{aligned} 2xy \leq \frac{x^2 + 4y^2}{2} &\iff 4xy \leq x^2 + 4y^2 \\ &\iff 0 \leq x^2 + 4y^2 - 4xy \\ &\iff 0 \leq (x - 2y)^2 \end{aligned}$$

la dernière proposition est $\forall x, y \in \mathbb{R}$

donc $P : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2xy \leq \frac{x^2 + 4y^2}{2}$ est vraie

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :

$$4xy \leq x^2 + 4y^2$$

$$4yz \leq y^2 + 4z^2$$

$$4zx \leq z^2 + 4x^2$$

$$\implies 4xy \cdot 4yz \cdot 4zx \leq (x^2 + 4y^2)(y^2 + 4z^2)(z^2 + 4x^2)$$

car les cotés droits des inégalités sont positifs

$$\text{Ainsi } (8xyz)^2 \leq (x^2 + 4y^2)(y^2 + 4z^2)(z^2 + 4x^2)$$

2.a Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel, on a n est
 $n + 1$ sont consécutifs

Si n est pair, donc il exist $k \in \mathbb{N}$ tel que
 $n = 2k$ alors $n(n + 1) = 2k(2k + 1)$ est pair

Si n est impair, donc il exist $k \in \mathbb{N}$ tel que
 $n = 2k + 1$

$$\begin{aligned} n(n + 1) &= (2k + 1)(2k + 1 + 1) \\ &= (2k + 1)(2k + 2) \\ &= (2k + 1)(2(k + 1)) \\ &= 2(2k + 1)(k + 1) \end{aligned}$$

est pair

Ainsi, quel que soit l'entier n , le produit $n(n + 1)$ est
pair

b. Montrer par contraposée que

$\forall n \in \mathbb{N} : (n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 $\implies n$ est
pair

c-à-d On montre que

n est impair $\implies n$ est divisible par 8

Soit n un entier impair, donc $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4k(k + 1) \\ &= 4 \cdot 2k' \text{ car } k(k + 1) \text{ est pair} \\ &= 8k' \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} :$

$(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8 $\implies n$ est pair

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : \sqrt{2x-3} = \frac{6-x}{\sqrt{x}}$$

L'équation (E) a un sens ssi $2x-3 \geq 0$ et $x \neq 0$

c-à-d $x \geq \frac{3}{2}$ et $x \neq 0$

Soit $x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[:$

- si $6-x < 0$ c-à-d $x > 6$ l'équation est impossible.
- si $x \in \left[\frac{3}{2}, 6\right]$

$$\begin{aligned}(E) &\iff 2x-3 = \frac{(6-x)^2}{x} \\ &\iff 2x^2-3x = 36-12x+x^2 \\ &\iff x^2+9x-36 = 0 \\ &\iff x = \frac{-9-15}{2} \text{ ou } x = \frac{-9+15}{2} \\ &\iff x = -12 \text{ ou } x = 3\end{aligned}$$

Alors l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{3\}$

4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

On procède par récurrence:

- pour $n=0$: $2 \times 0 + 1 = 0 + 1$ est vrai, donc la proposition est vraie pour $n=0$

On suppose que $\sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

et on montre que: $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = (n+2)^2$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) &= \sum_{k=0}^n (2k+1) + 2(n+1) + 1 \\ &= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1 \\ &= (n+1+1)^2 \\ &= (n+2)^2\end{aligned}$$

• Conclusion $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

5. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Exprimer à l'aide de quantificateurs la proposition

$R : A \subset B$.

$$\forall x \in E; \quad x \in A \implies x \in B$$

6.a Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n^2+2n} \notin \mathbb{N}$.

On a $n^2 < n^2+2n < n^2+2n+1$

Donc $n^2 < n^2+2n < (n+1)^2$

Ainsi $n < \sqrt{n^2+2n} < n+1$

Alors $\sqrt{n^2+2n}$ ne peut pas être un entier car il est compris entre deux entiers consécutifs

b. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.

On a

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{n}{n+2}} &= \sqrt{\frac{n(n+2)}{(n+2)^2}} \\ &= \frac{1}{n+2} \sqrt{n^2+2n}\end{aligned}$$

$\sqrt{\frac{n}{n+2}} \in \mathbb{Q}$ ssi $\sqrt{n^2+2n} \in \mathbb{N}$ ce qui est impossible selon la question b.a

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}.$$

méthode 2:

Supposant qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sqrt{\frac{n}{n+2}} = \frac{a}{b} \implies \frac{n}{n+2} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\implies nb^2 = na^2 + 2a^2$$

$$\implies nb^2 - na^2 = 2a^2$$

$$\implies n(b^2 - a^2) = 2a^2$$

$$\implies n = \frac{2a^2}{b^2 - a^2}$$

$$\implies b^2 - a^2 \mid a^2 \quad \text{ou} \quad b^2 - a^2 \mid 2$$

Si $b^2 - a^2$ divise a^2 , alors b^2 divise a^2 .

$$\implies b^2 \mid a^2 \quad \text{ou} \quad b^2 - a^2 \mid 2$$

b^2 ne peut pas diviser a^2 car $\text{pgcd}(a^2, b^2) = 1$
(puisque $\frac{a}{b}$ est irréductible, $\frac{a^2}{b^2}$ est aussi irréductible).

Ainsi, $b^2 - a^2 \mid 2 \implies b^2 - a^2 \in \{1, 2\}$.

$$\text{Si } b^2 - a^2 = 1 \implies (b-a)(b+a) = 1$$

$$\implies \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=1 \end{cases}$$

$$\implies a=0 \text{ et } b=1$$

ce qui est impossible.

$$\text{Si } b^2 - a^2 = 2 \implies (b-a)(b+a) = 2$$

$$\implies \begin{cases} b-a=1 \\ b+a=2 \end{cases}$$

$$\implies b=1.5 \text{ et } a=0.5$$

ce qui est impossible.

Conclusion $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$

2 Exercice 2

Montrer que : $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$

méthode 1:

Remarquer que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \setminus (B \setminus A) &= (A \cup B) \setminus (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{B \cap \overline{A}} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup A) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= A \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A \end{aligned}$$

méthode 2:

$$x \in A \implies x \in A \cup B \text{ et } x \notin B \setminus A$$

car $x \in A$ et x ne peut pas appartenir à B sans appartenir à A

$$\text{donc } x \in (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$$

$$\text{Ainsi } A \subset (A \cup B) \setminus (B \setminus A) \quad (1)$$

On a

$$x \in (A \cup B) \setminus (B \setminus A) \implies x \in A \cup B \text{ et } x \notin (B \setminus A)$$

puisque $x \in (A \cup B)$ alors $x \in A$ ou $x \in B$

- Si $x \in A$ c'est notre but
- Si $x \in B$

alors $x \notin (B \setminus A)$ implique que $x \in A$

parce que $x \notin (B \setminus A) \iff x \notin (B \cap \overline{A})$
autrement dit : $x \notin B$ et $x \notin \overline{A}$

$$\text{Ainsi } (A \cup B) \setminus (B \setminus A) \subset A \quad (2)$$

De (1) et (2), on conclut que $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$.

On a

$$\begin{aligned}
A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{A \cap B} \\
&= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\
&= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \\
&= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \\
&= A \cap \overline{B} \\
&= A \setminus B
\end{aligned}$$

1.b On a

$$A \cup B = \{1; 2; 3; \dots; 11\} \quad ; \quad A \cap B = \{4; 5; 6; 11\} \quad \text{et} \quad B \setminus A = \{7; 8; 9; 10\}$$

Déterminer et justifier les ensembles : A , $A \setminus B$ et $A \Delta B$.

$$\text{On a } A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$$

$$\text{Donc } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11\}$$

$$\text{On a } A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$$

$$\text{Donc } A \setminus B = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{rappel } A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\text{donc } A \Delta B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10\}$$

$$2. \text{ On a } C = \left\{ \frac{19\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{Donc}$$

$$\begin{aligned}
x \in C &\iff x = \frac{19\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{1}{10} (19\pi + 2k\pi) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{1}{10} (-3\pi + 20\pi + 2\pi + 2k\pi) \\
&\iff x = \frac{1}{10} (-3\pi + 20\pi + 2(k+1)\pi) \\
&\iff x = \frac{-3\pi}{10} + 2\pi + \frac{(k+1)\pi}{5} \\
&\iff x = \frac{-3\pi}{10} + \frac{(k')\pi}{5} \quad ; \quad k' = k+1 \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{-3\pi}{10} - \frac{k''\pi}{5} \quad ; \quad k'' = -k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x \in D
\end{aligned}$$

Alors $C = D$ Note: Peut etre le prof a fait une faute de frappe ici, je ne vois pas l'interet à changer $+k\pi$ en $-k\pi$

3 Exercice 3

1. a On a $A \cap B \subset A$ et $A \subset A \cup B$ donc

$A \cap B \subset A \cup B$ b. On a

$$\begin{aligned}
(A \Delta B) \cup (\overline{A \cup B}) &= (A \setminus B \cup B \setminus A) \cup (\overline{A \cap B}) \\
&= [(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] \cup (\overline{A \cap B}) \\
U \text{ commutatif} &= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A \cap B}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= \overline{B} \cap (A \cup \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= (\overline{B} \cap E) \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= \overline{B} \cup (B \cap \overline{A}) \\
&= (\overline{B} \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&= E \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&= \overline{B} \cup \overline{A} \\
&= \overline{B \cap A}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
(A \Delta B) \cup (\overline{A \cup B}) &= (A \setminus B \cup B \setminus A) \cup (\overline{A \cap B}) \\
&= [(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] \cup (\overline{A \cap B}) \\
U \text{ associatif} &= (A \cap \overline{B}) \cup [(B \cap \overline{A}) \cup (\overline{A \cap B})] \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup [\overline{A} \cap (B \cup \overline{B})] \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap E) \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup \overline{A} \\
&= (A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&= E \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) \\
&= \overline{B} \cup \overline{A} \\
&= \overline{B \cap A}
\end{aligned}$$

c. On a

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (B \setminus C) \subset A \\ (C \setminus D) \subset A \end{cases} &\implies \begin{cases} (B \cap \overline{C}) \subset A \\ (C \cap \overline{D}) \subset A \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} B \subset A \text{ et } \overline{C} \subset A \\ C \subset A \text{ et } \overline{D} \subset A \end{cases} \\
&\implies B \subset A \text{ et } \overline{D} \subset A \\
&\implies (B \cap \overline{D}) \subset A \\
&\implies (B \setminus D) \subset A
\end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question que :

$$A = \{2k + 6 \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ et } B = \{2k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que $\mathbb{Z} \subset (A \cup B)$ et en déduire que $A \cup B = \mathbb{Z}$.

$$\text{On a } A = \{2k + 6, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

c-à-d $A = \{2(k + 3), \quad k \in \mathbb{Z}\}$ c'est l'ensemble des entiers relatifs pairs

$$\text{On a } B = \{2k + 3, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

c-à-d $B = \{2(k + 1) + 1, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ c'est l'ensemble des entiers relatifs impairs

$A \cup B$ est l'ensemble des entiers relatifs pairs et impairs

il est évident que $\mathbb{Z} \subset (A \cup B)$ (1)

puisque $A \subset \mathbb{Z}$ et $B \subset \mathbb{Z}$ alors $(A \cup B) \subset \mathbb{Z}$ (2)

De (1) et (2) on déduit que $\mathbb{Z} = A \cup B$

3. On a :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\} \text{ et } B = \{(3 + 2t; 1 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

• pour $t = 1$: $3 + 2(1) = 5$ et $1 + 1 = 2$ donc $(5, 2) \in B$

• pour $t = 0$ on a $3 + 2(0) = 3$ et $1 + 0 = 1$ donc $(3, 1) \in B$

On a $3 - 2(1) = 1$ donc $(3, 1) \in A$

Ainsi, $(3, 1) \in A \cap B$

note:

si l'étudiant n'a pas remarqué les valeurs de t , il suffit de résoudre les équations $3 + 2t = 5$ et $1 + t = 2$ et trouver une seule valeur de t

$$\text{On a } (x, y) \in B \iff \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 + 2t \\ 2y = 2 + 2t \end{cases} \iff x - 2y = 1 \iff (x, y) \in A$$

Ainsi $A = B$

On a $(0, 0) \notin A$ donc $\mathbb{R}^2 \not\subset A$

In October 22, 2025, by MOSAID