

Exercice 2 (10 points)

1. On considère les propositions : $P : (\forall x, y \in \mathbb{R}) \quad 2xy \leq \frac{x^2 + 4y^2}{2}$ et $Q : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 + 9x - 36 = 0$

- (1) (a) Déterminer la négation de P et montrer que Q est vraie.
- (1) (b) Montrer par équivalence que P est vraie.
- (0.5) (c) En déduire que : $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n) \quad (x^2 + 4y^2)(y^2 + 4z^2)(z^2 + 4x^2) \geq (8xyz)^2$
- (1) 2. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n(n+1)$ est pair.
- (1.5) (b) Montrer par contraposition que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : (n^2 - 1) \text{ n'est pas divisible par } 5 \Rightarrow n \text{ est pair}$
- (1.5) 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E) : \sqrt{2x-3} = \frac{6-x}{\sqrt{x}}$

(1.5) 4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2$

(0.5) 5. Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

Exprimer à l'aide de quantificateurs la proposition $R : A \subset B$.

(0.5) 6. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n^2 + 2n} \notin \mathbb{N}$.

(1) (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{\frac{n}{n+2}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3 (4 points)

Soient A et B des parties d'un ensemble E .

- (1) 1. (a) Montrer que : $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$ et $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- (b) On suppose que :
 $A \cup B = \{1; 2; 3; \dots; 11\}$; $A \cap B = \{4; 5; 6; 11\}$ et $B \setminus A = \{7; 8; 9; 10\}$
- (1.5) Déterminer et justifier les ensembles : A , $A \setminus B$ et $A \Delta B$.
2. On pose : $C = \left\{ \frac{19\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $D = \left\{ \frac{-3\pi}{10} - \frac{k\pi}{5} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
- (1.5) Montrer que $C = D$.

Exercice 4 (6 points)

Soient A , B et C des parties d'un ensemble E .

- (0.5) 1. (a) Vérifier que $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.
- (1) (b) Montrer que : $(A \Delta B) \cup \overline{(A \cup B)} = \overline{(A \cap B)}$
- (1.5) (c) Montrer que : $\begin{cases} (B \setminus C) \subset A \\ (C \setminus D) \subset A \end{cases} \Rightarrow (B \setminus D) \subset A$
2. On suppose dans cette question que :
 $A = \{2k + 6 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $B = \{2k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- (1) Montrer que $\mathbb{Z} \subset (A \cup B)$ et en déduire que $A \cup B = \mathbb{Z}$.
3. On suppose dans cette question que :
 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 1\}$ et $B = \{(3 + 2t; 1 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- (1) (a) Vérifier que $(5; 2) \in B$ et $(3; 1) \in A \cap B$.
- (1) (b) Montrer que $A = B$ et $\mathbb{R}^2 \not\subset A$.

Note On admet que si $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{a^2}{b^2}$ est irréductible.